

HÀ VĂN CHƯƠNG - TRẦN VĂN TOÀN

50 ĐỀ THI

MÔN TOÁN

Thi vào lớp

10



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀ VĂN CHƯƠNG - TRẦN VĂN TOÀN

* * *

50 *Đề thi*
MÔN TOÁN
Thi vào lớp **10**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc :* **PHÙNG QUỐC BẢO*

Tổng biên tập :* **NGUYỄN BÁ THÀNH*

Biên tập

NS Bình Thạnh

Chế bản

NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa

Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ : 374 Xô Viết Nghệ Tĩnh P.25 – Q.BT – TP.HCM

ĐT: 5117907 – Fax: 8999898

Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

50 Đề thi môn Toán thi vào lớp 10

Mã số : 1L – 253 DH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16x24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.

Số xuất bản : 769 – 2007/CXB/29 – 114/DH-QGHN ngày 21/09/2007.

Quyết định xuất bản số : 581 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.

MỤC LỤC

Đề 1	3
Đề 2	5
Đề 3	8
Đề 4	11
Đề 5	14
Đề 6	16
Đề 7	20
Đề 8	23
Đề 9	26
Đề 10	29
Đề 11	31
Đề 12	34
Đề 13	37
Đề 14	40
Đề 15	43
Đề 16	45
Đề 17	48
Đề 18	51
Đề 19	54
Đề 20	57
Đề thi vào lớp 10 chuyên TPHCM (2006 - 2007)	60
Đề thi vào lớp 10 khối chuyên ĐHKHTN (2006 - 2007)	64
Đề thi vào lớp 10 TPHCM (2006 - 2007)	67
Đề thi vào lớp 10 Nguyễn Trãi – Hải Phòng (2005 - 2006)	70
Đề thi vào lớp 10 Nguyễn Bình Khiêm – VL (2005 - 2006)	73
Đề 26	76
Đề 27	79
Đề 28	83
Đề 29	86
Đề 30	89
Đề 31	92
Đề 32	95

Đề 33	98
Đề 34	102
Đề 35	105
Đề 36	108
Đề 37	110
Đề 38	113
Đề 39	115
Đề 40	118
Đề 41	121
Đề 42	123
Đề 43	126
Đề 44	128
Đề 45	130
Đề 46	133
Đề thi vào lớp PT Năng Khiếu QG TPHCM (2004 - 2005)	135
Đề thi vào lớp 10 Chu Văn An – Amsterdam (2005 - 2006)	139
Đề thi vào lớp 10 Ban(A, B) Lê Hồng Phong TPHCM	142
Đề thi vào lớp 10 Tỉnh Thái Bình (2005 - 2006)	145
Đề thi vào lớp 10 Trường PTH Quốc Học Huế (2004 - 2005)	148
Đề thi vào lớp 10 Tỉnh Hà Nam (2005 - 2006)	150
Đề thi vào lớp 10 Tỉnh Thái Bình (2002 - 2003)	153
Đề thi vào lớp 10 Lê Quý Đôn – Bình Định (2005 - 2006)	156

ĐỀ 1

Câu 1. Cho hai biểu thức: $A = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$; $B = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$

- Tìm điều kiện có nghĩa mỗi biểu thức.
- Rút gọn A và B.
- Tính tích A.B với $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ và $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Câu 2. Giải các phương trình:

a) $x - \frac{15}{x} = 2$ b) $\sqrt{x+5} - 2 = 0$

Câu 3. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì làm xong trong 4 giờ. Nếu mỗi đội làm một mình để làm công việc ấy, thì đội thứ nhất cần thời gian ít hơn so với đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình công việc ấy trong bao lâu?

Câu 4. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn về phía nửa mặt phẳng bờ O_1O_2 chứa điểm B, có tiếp điểm thứ tự là E và F. Qua A vẽ cát tuyến song song với EF cắt đường tròn (O_1) và (O_2) theo thứ tự tại C và D. Đường thẳng CE và đường thẳng DF cắt nhau tại I.

- Chứng minh IA vuông góc CD
- Chứng minh tứ giác IEBF nội tiếp
- Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của EF

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 2(m + p) + mp - m^2 - p^2$

Giải

Câu 1.

- Điều kiện có nghĩa của biểu thức A là $x > 0, y > 0; x \neq y$
Điều kiện có nghĩa của biểu thức B là $xy > 0$

b) Rút gọn: $A = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

c) $A.B = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$

Thay giá trị ta có: $A.B = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

Câu 2.

a) Điều kiện $x \neq 0$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$\Delta' = 1 + 15 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4$$

Phương trình có hai nghiệm $x = -3; x = 5$

b) Điều kiện: $x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$

Phương trình đã cho trở thành: $x + 5 = 4 \Rightarrow x = -1$

Câu 3. Gọi thời gian mà đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x giờ ($x > 4$)

Thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là $(x + 6)$ giờ

Như vậy trong một giờ thì đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc và đội

thứ hai làm được $\frac{1}{x + 6}$ công việc

Cả hai đội làm chung thì làm xong công việc trong 4 giờ, nên một giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Do đó ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 6; x_2 = -4$ (loại)

Vậy đội thứ nhất làm một mình xong công việc trong 6 giờ và đội thứ hai làm một mình xong công việc trong 12 giờ.

Câu 4.

a) Ta có: $EF \parallel CD; O_1E \perp EF; O_2F \perp EF$

Suy ra: $O_1E \perp CD$ tại M

Và $O_2F \perp CD$ tại N

$\Rightarrow CM = MA$ và $AN = ND$

Tứ giác EFMN là hình chữ nhật nên ta có:

$$\begin{aligned} EF &= MN = MA + NA \\ &= \frac{CA + AD}{2} = \frac{CD}{2} \end{aligned}$$

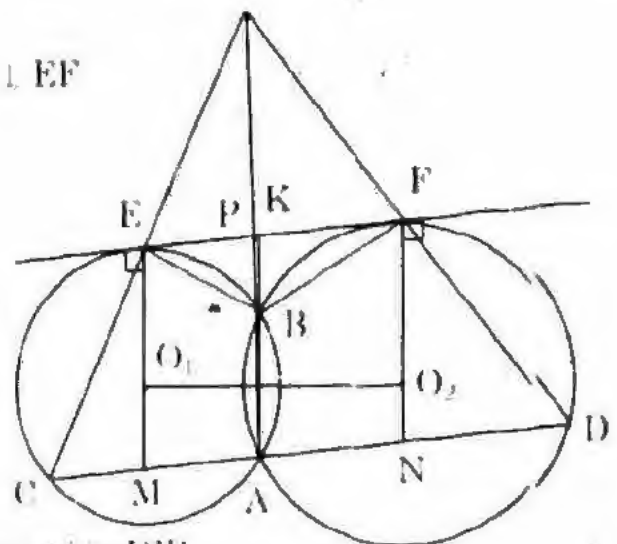
$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của tam giác ICD

Do đó: $IE = EC$ và $IF = FD$

Nên EM là đường trung bình của tam giác IAC $\Rightarrow EM \parallel IA$

Vậy $IA \perp CD$ (đpcm)

b) Ta có: $\widehat{IEB} + \widehat{BEC} = 180^\circ$ và $\widehat{BAC} + \widehat{BEC} = 180^\circ$ (tứ giác ABEC nội tiếp)



: $\widehat{IEB} = \widehat{BAC}$. Tương tự ta có: $\widehat{IFB} = \widehat{BAD}$

: $\widehat{IEB} + \widehat{IFB} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

Vv tứ giác IEBF nội tiếp (dpcm)

c) Gọi K là giao điểm của AB và EF

Xét đường tròn (O_1) ta có: $KE^2 = KA.KB$

Xét đường tròn (O_2) ta có: $KF^2 = KA.KB$

: $KE = KF$

Vv đường thẳng AB đi qua trung điểm K của EF

Câu 5 $A = 2(m + p) + mp - m^2 - p^2$

: $2A = 8 - (m - p)^2 - (m - 2)^2 - (p - 2)^2 \leq 8 \Rightarrow A \leq 4$

Vv giá trị lớn nhất của A là 4, đạt được khi $m = p = 2$

ĐỀ 2

Câu . Giải các phương trình:

a) $\frac{1}{-4} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{3}$

b) $(2x - 1)(x + 4) = (x + 1)(x - 4)$

Câu . Vẽ đồ thị hàm số $y = -0,5x^2$. Trên đồ thị hàm số y lấy hai điểm A và B có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Hãy viết phương trình đường thẳng AB

Câu . Cho $A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2(x - 2\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A nhận giá trị nguyên

Câu . Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$; $\widehat{A} = 90^\circ$), một cung tròn BC nằm bên trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi P là giao điểm của MB, IK và Q là giao điểm của MC, IH.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được

b) Chứng minh rằng tia đối của tia MI là phân giác góc HMK

c) Chứng minh rằng tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra PQ song song với BC.

d) Gọi (O_1) là đường tròn qua M, P, K; (O_2) là đường tròn qua M, Q, I; N là giao điểm thứ hai của (O_1) , (O_2) và D là trung điểm của L. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Giải

Câu 1.

a) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{3}$

Điều kiện: $x \neq \pm 4$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$3(x+4) + 3(x-4) = x^2 - 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8; x_2 = -2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 8; x = -2$

b) $(2x-1)(x+4) = (x+4)(x-4)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x - x - 4 = x^2 - 4x + x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -10$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0; x = -10$

Câu 2. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Với $x < 0$ thì hàm số đồng biến và $x > 0$ thì hàm số nghịch biến

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Với $x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ nên $A\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$; với $x = 2 \Rightarrow y = -2$ nên $B(2; -2)$

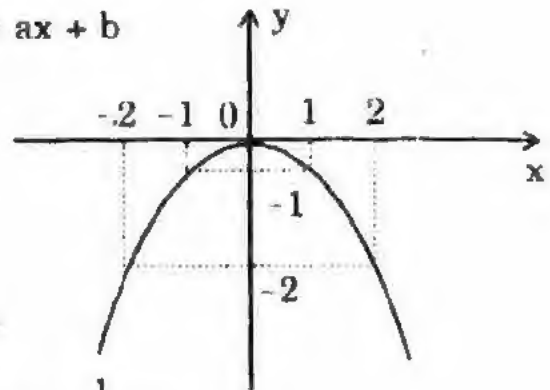
Phương trình đường thẳng có dạng: $y = ax + b$

Vì đường thẳng đi qua A, B

nên ta có:
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = -a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $a = -\frac{1}{2}$ và $b = -1$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = -\frac{1}{2}x - 1$



Câu 3.

a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$

Biểu thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Tangent in } A: \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x-1}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

Với n số nguyên dương thì A là số nguyên khi $\sqrt{x} - 1$ là ước của 2

- $\sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x = 4$
- $\sqrt{x-1} = -1 \Rightarrow x = 0$ (không thỏa điều kiện)
- $\sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 9$
- $\sqrt{x-1} = -2 \Rightarrow$ không có giá trị x

Vậy với $x = 4$; $x = 9$ thì A có giá trị nguyên

Câu 4.

$$(d) \text{ Take } \angle MIB, \angle MKB \perp AB \Rightarrow \widehat{MIB} + \widehat{MKB} = 180^\circ$$

Đo độ tự giác BIMK nối tiếp được dương tròn

Chung mình tương tử ta được tử giác MICH nối tiếp trong đường tròn

b) Do $AB = AC'$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{AC'B}$

Gốc nhà của MI là Mx, các tư giác BIMK, MICH nội tiếp nên:

$$\widehat{IMH} = 180^\circ \quad \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{IMK}$$

$$\widehat{KMx} = 180^\circ - \widehat{IMK} = 180^\circ - \widehat{IMH} = \widehat{HMx}$$

Vậy M_x là tia phân giác của \widehat{IMK}

c) Theo kết quả câu a) ta có:

$$\widehat{MIK} = \widehat{MBK} \text{ và } \widehat{MIH} = \widehat{MCH}$$

$$\Rightarrow \widehat{PIQ} = \widehat{MIK} + \widehat{MIH} = \widehat{MBK} + \widehat{MCH}$$

Mặt khác:

$$\text{Sd } \widehat{\text{MBI}} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{\text{CM}} = \text{sd } \widehat{\text{MCH}}$$

$$\text{Sd } \widehat{\text{MBK}} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{\text{BM}} = \text{sd } \widehat{\text{MCB}}$$

Сумма: $\widehat{PIQ} = \widehat{MCB} + \widehat{MBC}$

Trong tam giác BMC thì $\widehat{BMC} = 180^\circ - (\widehat{MCB} + \widehat{MBC})$, do đó:

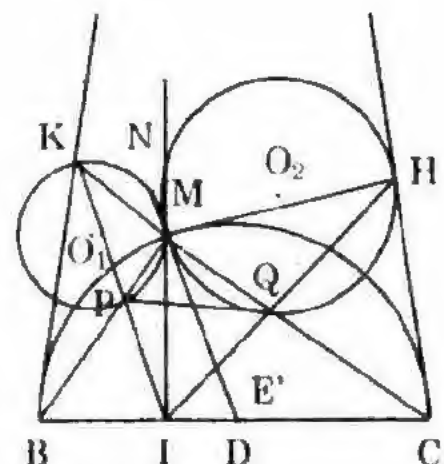
$$\widehat{BMC} + \widehat{PIQ} = 180^\circ - \widehat{MBC} + \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = 180^\circ$$

Vây tứ giác MPIQ nối tiếp được đường tròn

Từ đó suy ra $\widehat{MQP} = \widehat{MIP}$, mà $\widehat{MIP} = \widehat{MBK}$ và $\widehat{MBK} = \widehat{MCB}$

Do đó $\widehat{MQP} = \widehat{MC'B}$ nên $PQ \parallel BC$

d) Ta có: $\widehat{MH} = \widehat{MQP}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo \widehat{MQ})



Hai tia QP, QH nằm khác phía đối với QM nên đường tròn (O) tiếp xúc với PQ tại Q.

Tương tự ta cũng có đường tròn O_1 tiếp xúc với PQ tại P

Do đó PQ là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2)

Gọi E và E' là giao điểm của MN với PQ, MN với BC

Ta có: $PE = \sqrt{EM \cdot EN} = EQ$ (vì $\triangle PEM \sim \triangle NEP$ và $\triangle EQM \sim \triangle ENQ$)

Do $PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{EP}{E'B} = \frac{EQ}{E'C}$; $PE = EQ$ nên $E'B = E'C$ hay $E' \in D$

Vậy M, N, P thẳng hàng.

ĐỀ 3

Câu 1. Cho hai hàm số: $y = 2x + 2$ (d_1) ; $y = -\frac{1}{2}x - 2$ (d_2)

- Vẽ đồ thị của hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ
- Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với trục Oy là A, giao điểm của đường thẳng (d_2) với trục Ox là B và giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_2) là C

Tam giác ABC là tam giác gì? Tìm tọa độ các điểm A, B, C

- Tính diện tích tam giác ABC

Câu 2.

a) Tính: $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Câu 3. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể lớn thì trong 10 giờ sẽ chảy đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 6 giờ và vòi thứ hai chảy trong 3 giờ thì bể chỉ đầy được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì phải chảy trong bao lâu mới đầy bể?

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Một dây CD cắt AB tại E. Một tiếp tuyến (d) tiếp xúc với đường tròn tại B cắt các tia AC; AD tại M và N. Chứng minh:

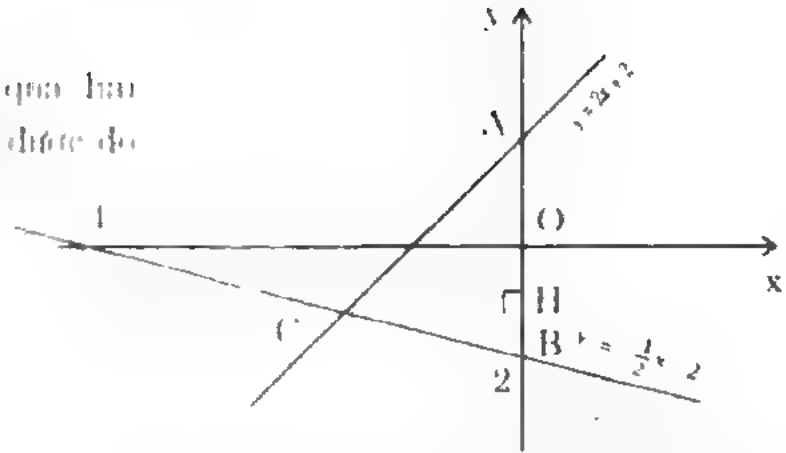
- $\triangle ABC \sim \triangle ABM$; b) $AC \cdot AM = AD \cdot AN$
- Tiếp tuyến tại C cắt (d) ở I. Chứng minh I là trung điểm AB
- Xác định vị trí của dây CD sao cho tam giác AMN là tam giác đều

Giải

Câu 1.

- a) Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $(-1; 0)$ và $(0; 2)$ ta được đồ thị hàm số $y = 2x + 2$

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $(-4; 0)$ và $(0; -2)$ ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x - 2$



- b) A là giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 2$ với trục Oy nên: $2 \cdot 0 + 2 = y$
 $y = 2$ Vậy tọa độ A là $A(0; 2)$. Tương tự ta có tọa độ điểm B là $B(0; -2)$. C là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) nên tọa độ

$$\text{điểm C thỏa mãn hệ: } \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $x = -1,6$; $y = -1,2$

Vậy tọa độ điểm C là $C(-1,6; -1,2)$

Hai đường thẳng $y = 2x + 2$ và $y = -\frac{1}{2}x - 2$ có tích hai hệ số góc là:

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \text{Nên chúng vuông góc nhau. Do đó } \triangle ABC \text{ vuông ở C}$$

- c) Gọi H là hình chiếu của C trên Oy, ta có: $CH = |-1,2| = 1,2$

$$AB = AO + OB = 2 + |-2| = 4; \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,2 = 2,4$$

Câu 2.

a) $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$

b)
$$\begin{cases} x - y = 1 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) ta được $2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Thay $x = 3$ vào (1) suy ra $y = 2$. Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(3; 2)$

Câu 3. Gọi số giờ theo thứ tự mà voi, thừ nhất và voi thứ hai chạy một mình sẽ chạy hết là x và y ($x > 0; y > 0$)

Mỗi giờ voi thứ nhất chạy vào được $\frac{1}{x}$ bể, voi thứ hai chạy vào được

$\frac{1}{y}$ bể

ĐỀ 4

Câu 1.

- a) So sánh hai số: $3 + \sqrt{5}$ và $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$
 b) Tính giá trị của biểu thức: $P = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

Câu 2. Trong hệ trục tọa độ vuông góc, gọi (P) là đồ thị hàm số $y = x^2$

- a) Vẽ (P)
 b) Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là: 1 và 2.
 Viết phương trình đường thẳng AB
 c) Viết phương trình đường thẳng (D) song song với AB và tiếp xúc với (P)

Câu 3. Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm 2m, chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm $100m^2$. Nếu giảm cả chiều dài lẫn chiều rộng đi 2m thì diện tích giảm đi $68m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó.

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC với góc $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại A

- a) Chứng tỏ $\triangle ABC$ đều, tính cạnh của nó theo R
 b) M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ \widehat{BC} (M khác B, C), tiếp tuyến tại M của (O) cắt AB, AC tại E và F . Tính chu vi của $\triangle AEF$ theo R , có nhận xét gì?
 c) Chứng tỏ góc $\angle EOF$ không đổi khi M di động
 d) Trường hợp M là điểm chính giữa cung \widehat{BC} , chứng tỏ $\triangle AEF$ và $\triangle OEF$ là hai tam giác đều bằng nhau

Câu 5. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên và tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của phân thức:

$$A = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 2}{x - 3}$$

Giải

Câu 1.

- a) Ta có: $(3 + \sqrt{5})^2 = 9 + 5 + 6\sqrt{5} = 14 + \sqrt{36} \cdot \sqrt{5} = 14 + \sqrt{180}$
 $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 6 + 4\sqrt{12} = 14 + \sqrt{16} \cdot \sqrt{12} = 14 + \sqrt{192}$
 Vì $11 + \sqrt{180} < 14 + \sqrt{192}$ nên $3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

$$\begin{aligned}
 b) P &= (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} \\
 &= (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} \\
 &= \sqrt{10} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} = \sqrt{10} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{4 - 15} = \sqrt{10} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{-11}
 \end{aligned}$$

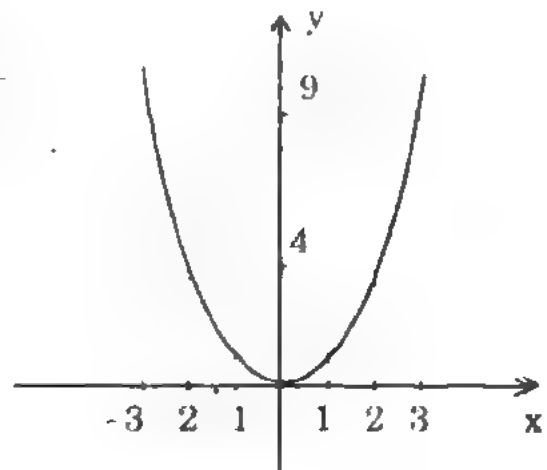
Câu 2.

- a) Hàm số $y = x^2$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$. Với $x > 0$ hàm số đồng biến, với $x < 0$ hàm số nghịch biến.

Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	0	0	1	4	9

Đồ thị:



- b) Phương trình đường thẳng có dạng: $y = ax + b$

Đường thẳng qua A nên:

$$-1 = a + b \quad (1)$$

Đường thẳng qua B nên:

$$4 = 2a + b \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được: $a = 1$; $b = 2$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = x + 2$.

- c) Đường thẳng D song song với AB có dạng: $y = x + b$

(D) tiếp xúc với (P) nên ta có: $x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 - x - b = 0$ có nghiệm kép

Phương trình trên có nghiệm kép khi: $\Delta = 1 + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình đường thẳng D là: $y = x - \frac{1}{4}$

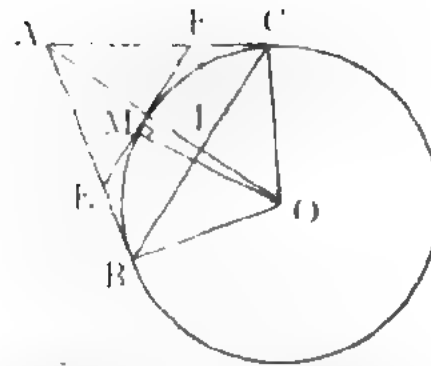
Câu 3. Gọi x (m), y (m) theo thứ tự là chiều dài, chiều rộng của thửa ruộng hình chữ nhật ($x > 2$, $y > 2$).

Diện tích của thửa ruộng là: $x \cdot y$ (m^2)

Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + 2)(y + 3) = xy + 100 \\ (x - 2)(y - 2) = xy - 68 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $x = 26$, $y = 8$ (thỏa điều kiện).

Vậy diện tích của thửa ruộng là: $26 \cdot 8 = 208 m^2$.

Câu 4.

a) Ta có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$

Nên tứ giác $OBAC'$ nội tiếp.

do đó $\widehat{BOC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\triangle ABC$ cân tại A (do $AB = AC$)

theo tính chất tiếp tuyến và có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều

b) Theo tính chất tiếp tuyến vẽ từ E và F đến (O) ta có: $EB = EM$ và

$$FC = FM \Rightarrow ME + MF = EB + FC$$

Với M nằm giữa E và F ta được: $EF = EM + MF = EB + FC$

Chu vi của tam giác AEF là: $AE + AF + EF$

$$AE + AF + EF = AE + EB + AF + FC = AB + AC = 2AB = 2R\sqrt{3}$$

Vậy chu vi tam giác AEF là $2R\sqrt{3}$ và không đổi khi M di động trên cung nhỏ BC.

c) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại E, ta có: $\widehat{EOM} = \frac{1}{2} \widehat{BOM}$

$$\text{và } \widehat{MOF} = \frac{1}{2} \widehat{MOC} \quad \text{Do đó } \widehat{EOF} = \widehat{EOM} + \widehat{MOF} = \frac{\widehat{BOM} + \widehat{MOC}}{2} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

Vậy $\widehat{EOF} = 60^\circ$, không đổi khi M di động.

d) Khi M là điểm chính giữa cung \widehat{BC} ta có:

$EF \perp BC$ (vì cùng vuông góc với MO) $\Rightarrow \triangle AEF$ đều (vì $\triangle AEF \sim \triangle ABC$)

$\triangle AEF$ đều có AO là tia phân giác của \widehat{BAC} , nên OA là đường trung trực của EF

Do đó $OE = OF \Rightarrow \triangle OEF$ cân tại O, với $\widehat{EOF} = 60^\circ$ thì tam giác cân OEF là tam giác đều.

Vậy $\triangle AEF$ và $\triangle OEF$ là hai tam giác đều có cùng cạnh EF nên chúng bằng nhau

Câu 5. $A = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 2}{x - 3} = x^2 - 2x + 3 + \frac{7}{x - 3}$

A có giá trị nguyên khi $\frac{7}{x - 3}$ là nguyên, tức là phải có $(x - 3)$ là ước

của 7. Do đó: $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

$$x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

$$x - 3 = -7 \Rightarrow x = -4$$

$$x - 3 = 7 \Rightarrow x = 10$$

Vậy với $x \in \{-4; 2; 4; 10\}$ thì A là các số nguyên sau:

Với $x = -4 \Rightarrow A = 26$

Với $x = 2 \Rightarrow A = -4$

Với $x = 4 \Rightarrow A = 18$

Với $x = 10 \Rightarrow A = 84$

ĐỀ 5

Câu 1. Cho biểu thức: $A = x^2 - 3x\sqrt{y} + 2y$

a) Phân tích A thành nhân tử

b) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$, $y = \frac{1}{9+4\sqrt{5}}$

Câu 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$; b) $B = \cot gx + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

Câu 3. Có hai thửa đất hình chữ nhật: thửa thứ nhất có chu vi là 240m, thửa thứ hai có chiều dài, chiều rộng hơn chiều dài, chiều rộng của thửa thứ nhất là 15m. Tính chiều dài, chiều rộng của mỗi thửa đất biết rằng tỉ số diện tích giữa thửa thứ nhất và thửa thứ hai là $\frac{5}{8}$

Câu 4. Giải các phương trình:

a) $x^2 + 2(\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{7 + \sqrt{2}x} = 3 + \sqrt{5}$

Câu 5. Cho đường tròn (O), một đường kính AB cố định, một điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E

a) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp

b) Chứng minh $\angle AME \sim \angle ACM$ và $AM^2 = AE.AC$

c) Chứng minh $AE.AC = AI.IB = AI^2$

d) Xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CME$ nhỏ nhất

Giải

Câu 1

$$a) A = (x - \sqrt{y})(x - 2\sqrt{y})$$

$$b) x = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$$

$$y = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{9 - 4\sqrt{5}}{80 - 81} = 9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 2)^2$$

$$\forall y, A = \left[\sqrt{5} + 2 \quad \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} \right] \left[\sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} \right] = 4(6 - \sqrt{5})$$

Câu 2

$$a) A = \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$b) B = \cotgx + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}$$

Câu 3. Gọi chiều dài, chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật thứ nhất lần lượt là: x (m)

y (m) ($x > y > 0$) thì chiều dài, chiều rộng của thửa đất thứ hai là:

$(x + 15)$ m, $(y + 15)$ m

Chu vi của thửa đất thứ nhất là 240m thì nửa chu vi là 120m, nên ta có phương trình: $x + y = 120$ (1)

Diện tích của thửa thứ nhất là: $x.y$ (m²)

Diện tích của thửa thứ hai là: $(x + 15)(y + 15)$

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{xy}{(x + 15)(y + 15)} = \frac{5}{8}$

Giải hệ phương trình trên ta được: $y_1 = 75; y_2 = 45$, suy ra $x_1 = 45; x_2 = 75$. Thử lại ta có kết quả:

Chiều dài, chiều rộng của thửa vườn thứ nhất là 75m ; 45m

Chiều dài, chiều rộng của thửa vườn thứ hai là 90m ; 60m

Câu 4.

$$a) x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} = 0. \text{ Ta có: } \Delta' = (\sqrt{3} + 1)^2 - 2\sqrt{3} = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2$$

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó hãy tìm hai điểm A và B

Câu 4. Một xí nghiệp đóng gói dự định hoàn thành kế hoạch trong 26 ngày. Nhưng nhờ cải tiến kỹ thuật theo qui trình công nghệ mới nên mỗi ngày đã làm vượt mức 6000 đôi giày, do đó chẳng những đã hoàn thành kế hoạch dự định trong 24 ngày mà còn vượt mức 104.000 đôi giày. Tính số đôi giày phải làm theo kế hoạch

Câu 5. Cho đường tròn (O). R đường thẳng d không đi qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn). Kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M, N thuộc (O)). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K

a) Chứng minh bốn điểm C, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh $KN.KC = KH.KO$.

c) Đoạn thẳng CO cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh I cách đều CM, CN, MN

d) Một đường thẳng đi qua O song song với MN cắt tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF là nhỏ nhất

Giải

Câu 1.

a) $2x - 1 = 2x - 3 \quad (1)$

Nhận xét rằng hai vế của phương trình (1) không âm nên ta

phương hai vế: $(2x - 1)^2 = (2x - 3)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$

$\Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2} + x = 8 \Leftrightarrow |x - 2| + x = 8 \quad (1)$

• Nếu $x \geq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x - 2 + x = 8 \Leftrightarrow x = 5$

• Nếu $x < 2$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - 1 + x = 8$, vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 5$

Câu 2.

a) $A = 2\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3}) + (3\sqrt{3} + 1)^2 = 6\sqrt{3} + 6 + 27 + 6\sqrt{3} + 1 = 34$

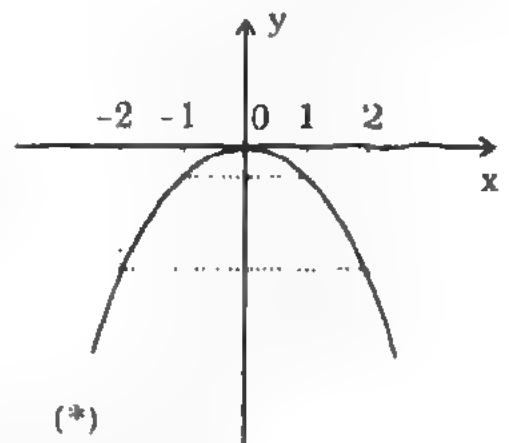
$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab} - b} \right) (a\sqrt{b} - b\sqrt{a}) \text{ với điều kiện } a > 0, b > 0; a \neq b \\
 &= \left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right] \cdot \sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \\
 &= \frac{b - a}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \cdot \sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = b - a
 \end{aligned}$$

Câu 3.

- a) Hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Với $x > 0$ hàm số nghịch biến, với $x < 0$ hàm số đồng biến

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-\frac{1}{2}	0	-\frac{1}{2}	-2



Đồ thị:

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x + m$ và (P) :

$$2x + m = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0 \quad (*)$$

(P) cắt đường thẳng $y = 2x + m$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Vậy khi $m < 2$ thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt. Khi đó:

- $x_1 = -2 + \sqrt{\Delta'} \Rightarrow y_1 = 2(-2 + \sqrt{\Delta'}) + m = -4 + 2\sqrt{\Delta'} + m$, do đó:

$$A(-2 + \sqrt{\Delta'}; -4 + 2\sqrt{\Delta'} + m)$$

- $x_2 = -2 - \sqrt{\Delta'} \Rightarrow y_2 = 2(-2 - \sqrt{\Delta'}) + m = -4 - 2\sqrt{\Delta'} + m$, do đó:

$$B(-2 - \sqrt{\Delta'}; -4 - 2\sqrt{\Delta'} + m)$$

Câu 4. Gọi số đôi giày mà xí nghiệp dự định làm là x (x : nguyên dương)

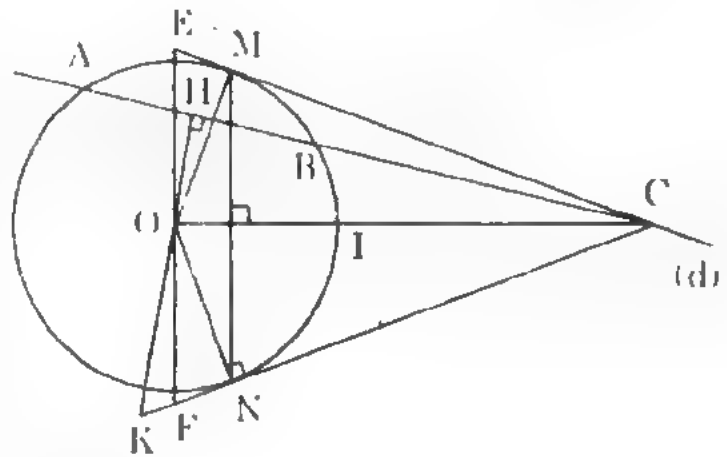
Số đôi giày mỗi ngày dự định làm là: $\frac{x}{26}$ đôi

Vì đã làm vượt mức 104.000 đôi giày nên số đôi giày đã làm được là: $(x + 104.000)$ và đã làm hoàn thành kế hoạch trong 24 ngày. Do đó

mỗi ngày đã làm được $\frac{x + 104.000}{24}$ đôi giày

Thứ lại kết quả thí số dôi gray xi nghiệp phải làm theo kế hoạch là: 520000 dôi.

Vây C là giao điểm của đường tròn $(O, R\sqrt{2})$ với đường thẳng d



ĐỀ 7

Câu 1.

a) Tính : $\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$

b) Giải phương trình: $\sqrt{x-4} = 4-x$

Câu 2. Cho Parabol $y = kx^2$ và đường thẳng $y = (p-1)x - p+1$

a) Biết parabol đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng

trên, hãy tìm k và q và tọa độ tiếp điểm Q

b) Viết phương trình đường thẳng QS biết tọa độ của S là $(2; 0)$. Tìm hoành độ các giao điểm của đường thẳng QS với parabol

Câu 3. Hai người thợ máy cùng làm chung thì sau 12 giờ xong công việc. Sau khi làm chung 8 giờ thì một người phải đi làm việc khác nên người còn lại phải làm nốt trong 5 giờ nữa mới xong. Hỏi làm một mình thì mỗi người phải mất mấy giờ mới xong?

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A với $OA = R\sqrt{2}$, một đường thẳng d quay quanh A cắt (O) tại M, N . Gọi I là trung điểm của đoạn MN :

a) Chứng tỏ $OI \perp MN$, suy ra I di động trên một cung tròn cố định với hai điểm giới hạn B, C thuộc (O)

b) Tính theo R độ dài AB, AC . Suy ra A, O, B, C là bốn đỉnh của hình vuông

c) Tính theo R diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đoạn AB, AC và cung nhỏ BC của (O)

d) Hãy chỉ ra vị trí của đường thẳng d tương ứng khi tổng $AM + AN$ lớn nhất và chứng minh điều đó.

Giải

Câu 1.

a) Tính: $\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1 - \sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

b) Giải phương trình

$$\sqrt{x-4} = 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = (4-x)^2 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 16-8x+x^2 \\ 4 \geq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' - 9x + 20 = 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Câu 2.

a) Parabol $y = kx^2$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ta có: $\frac{1}{4} = k \frac{1}{4} \Rightarrow k = 1$

Vậy parabol có dạng $y = x^2$. Với $p = 1 \neq 0$ hay $p \neq 1$ thì phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol là:

$$x^2 = (p - 1)x + (p - 1) \Leftrightarrow x^2 - (p - 1)x + p - 1 = 0 \quad (*)$$

Parabol tiếp xúc đường thẳng $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép, tức là:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (p - 1)^2 - 4(p - 1) = p^2 - 6p + 5 = 0$$

$$\therefore p_1 = 1 \text{ (loại)}; p_2 = 5. \text{ Khi đó } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{p - 1}{2} = 2$$

Vậy khi $k = 1, p = 5$ thì tọa độ tiếp điểm Q là $(2; 4)$

b) Đường thẳng QS có dạng $y = ax + b$ vì Q, S thuộc đường thẳng QS

$$\text{nên } \begin{cases} 4 = 2a + b \\ 0 = -2a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 2$$

Vậy phương trình đường thẳng QS là: $y = \frac{1}{2}x + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng QS và parabol:

$$x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -1,5$$

Vậy hoành độ hai giao điểm là $x_1 = 2$ và $x_2 = -1,5$

Câu 3. Gọi số giờ mà người thứ nhất làm một mình xong công việc là x ($x > 0$)

Gọi số giờ mà người thứ hai làm một mình xong công việc là y ($y > 0$)

Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai

làm được $\frac{1}{y}$ công việc và cả hai cùng làm chung được $\frac{1}{12}$ công việc

Cả hai làm chung trong 8 giờ được $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ công việc, nên phần công

việc còn lại là $\frac{1}{3}$ công việc.

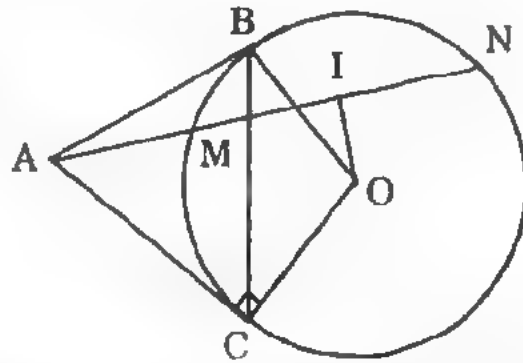
Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} = \frac{5}{y} \end{cases} \text{ . Giải hệ trên ta được } y = 15; x = 60 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất phải làm trong 60 giờ, người thứ hai phải làm trong 15 giờ

Câu 4.

- a) Đường kính đi qua trung điểm của dây cung thì vuông góc với dây cung đó, nên $OI \perp MN$
Điểm I nhìn đoạn AO cố định
Dưới góc 90° nên I chạy trên đường tròn đường kính AO



Cát tuyến AMN đi động quanh A tới hai vị trí giới hạn là hai tiếp tuyến AB, AC. Vậy điểm I chạy trên cung BOC của đường tròn đường kính AO.

- b) Xét tam giác vuông AOB có. $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{2R^2 - R^2} = R$
Tương tự, $AC = R$. Vì hai tam giác ABO và ACO đều là vuông cân nên dễ dàng suy ra ABOC là hình vuông
c) Gọi S là diện tích của tam giác cung giới hạn bởi các đoạn AB, AC và cung nhỏ BC của (O). Khi đó ta có: $S = S_1 - S_2$
Với S_1 là diện tích hình vuông ABOC, S_2 là diện tích hình quạt OBC

$$\text{Vậy } S = R^2 - \frac{\pi R^2}{4}$$

- d) Ta có: $AM + AN = 2AM + MN$
 $= 2(AM + MI) = 2AI$

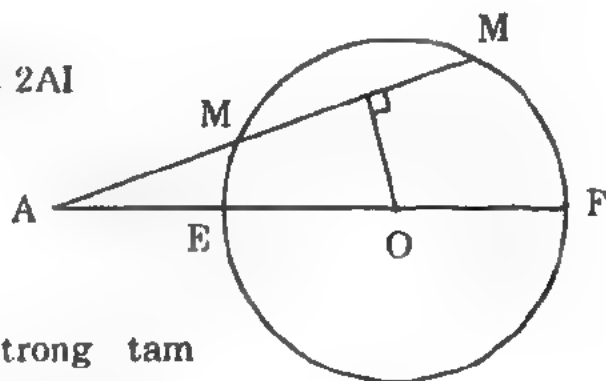
Kẻ đường kính đi qua A cắt đường tròn tại hai điểm E và F, theo trên ta có:

$$AE + AF = 2AO$$

Nếu d không trùng với AEF thì trong tam giác vuông AOI, ta có: $AI < AO$

$$\Rightarrow AM + AN < AE + AF$$

Vậy tổng $AM + AN$ lớn nhất khi d là đường thẳng đi qua tâm O



ĐỀ 8

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

a) Tính $f(2)$; $f(3)$; $f(-\sqrt{3})$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

b) Các điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$; $B(\sqrt{2}; 3)$; $C(-2; 6)$; $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{4}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số không?

Câu 2.

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}$

Với $a > 0$, $b > 0$ và $a \neq b$

b) Giải phương trình: $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2}$

Câu 3. Hai bến sông A và B cách nhau 40km. Cùng một lúc chiếc canô xuôi dòng từ A đến B và một chiếc bè cũng trôi từ A đến B với vận tốc 3km/h. Sau khi đến B, canô quay về A ngay và gặp chiếc bè ở một địa điểm cách A là 8km. Tính vận tốc của canô

Câu 4. Cho tam giác ABC ($AC > AB$, $\widehat{BAC} > 90^\circ$); I, K theo thứ tự là các trung điểm AB, AC, các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F

a) Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp được.

c) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.

d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ Hãy so sánh các đoạn thẳng DH, DE

Giải

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

a) $f(2) = 6$; $f(3) = 13,5$; $f(-\sqrt{3}) = 4,5$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3}$

- b) • Với $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số
- $$y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$$
- Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 3 \Rightarrow$ Điểm $B(\sqrt{2}; 3)$ thuộc đồ thị hàm số
- $$y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$$
- Với $x = 2 \Rightarrow f(2) = 6 \Rightarrow$ Điểm $C(2; 6)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$
- Với $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow$ Điểm $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

Câu 2.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \\ &= \frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} + \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}} = \frac{3(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3})}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } (1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$$

$$\Delta' = (1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 5) = 8$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2} + 1)(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = -7 - 4\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}} = 1$$

Câu 3. Gọi x (km/h) là vận tốc của canô ($x > 3$) thì vận tốc của canô khi xuôi dòng từ A đến B là $(x + 3)$ (km/h), vận tốc của canô ngược dòng từ B đến A là $(x - 3)$ (km/h)

Thời gian canô đi từ A đến B là $\frac{40}{x + 3}$ (giờ)

Thời gian canô đi từ B đến khi gặp chiếc bè là: $\frac{40 - 8}{x - 3} = \frac{32}{x - 3}$ (giờ)

Thời gian chiếc bo trôi từ A đến khu gập cano là: $\frac{8}{3}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{40}{x+3} + \frac{32}{x-3} = \frac{8}{3}$

Giải phương trình trên ta được: $x = 27$ (thỏa điều kiện)

Vậy vận tốc cano là 27 km/h

Câu 4.

a) Ta có: $\widehat{BDA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự: $\widehat{CDA} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{BDC} = 180^\circ$

Vậy B, D, C thẳng hàng

b) Ta có: $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Tương tự $\widehat{BFC} = 90^\circ$

Vậy E, F nằm trên đường tròn đường kính BC

c) Giả sử BF cắt CE tại S.

Trong $\triangle BCS$ có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại A

Suy ra AD là đường cao thứ ba, do đó AD đi qua đỉnh S

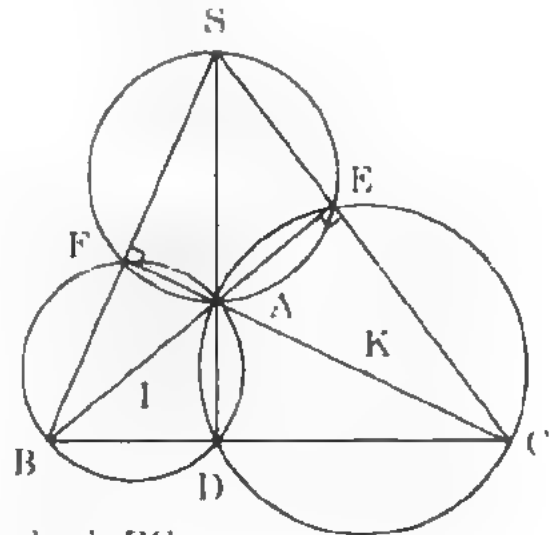
d) Tứ giác BDAF nội tiếp đường tròn nên $\widehat{FDA} = \widehat{FBA}$ (cung chắn cung FA)

Tương tự ta có: $\widehat{EDA} = \widehat{ECA}$ (cung chắn cung EA của đường tròn ngoại tiếp tứ giác DCEA)

Mặt khác tứ giác BFEC nội tiếp nên: $\widehat{FBA} = \widehat{ECA}$ (cung chắn cung FE). Vậy $\widehat{FDA} = \widehat{EDA}$

Như vậy hai tia DF và DE đối xứng nhau qua đường thẳng chứa đường kính SD của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$. Do đó E đối xứng với F hoặc với H. Điểm E không thể đối xứng với F (vì khi đó SB đối xứng với SC, do đó $BD = CD \Rightarrow AB = AC$, trái với giả thiết)

Do đó: $DH = DE$



ĐỀ 9

Câu 1. Cho biểu thức: $Q = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn Q

b) Tính giá trị Q biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$

c) Tìm giá trị x thỏa mãn: $Q\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) đi qua điểm $A(2; 4)$ và tiếp xúc với đồ thị (T) của hàm số $y = (m-1)x - (m-1)$

a) Tìm tọa độ tiếp điểm

b) Vẽ đồ thị (P) và (T) với a, m tìm được trên cùng một hệ trục tọa độ

Câu 3. Cho phương trình bậc hai đối với x

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-3 = 0 \quad (m \neq -1) \quad (1)$$

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1) tìm m để $x_1 x_2 > 0$ và $x_1 = 2x_2$

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính AC . Trên đoạn OC lấy điểm B . ($B \neq C$) và vẽ đường tròn O' đường kính BC . Gọi M là trung điểm của đoạn AB . Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB , DC cắt đường tròn (O') tại I

a) Tứ giác $ADBE$ là hình gì? Tại sao

b) Chứng minh ba điểm I, B, E thẳng hàng

c) Chứng minh rằng MI và tiếp tuyến của đường tròn (O') và

$$MI^2 = MB \cdot MC$$

Giải

Câu 1. $Q = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$

a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{x-1+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$b) \quad x = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3} - 1$$

$$\text{Do đó: } Q = \frac{(\sqrt{3} - 1 + 1)^2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$c) \quad Q\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \quad (\text{Điều kiện } x \geq 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + \sqrt{x-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \\ \sqrt{x-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \quad (\text{vì } (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \text{ và } \sqrt{x-4} \geq 0)$$

Câu 2.

$$a) \quad \text{Vì (P) đi qua điểm } A(-2; 4) \text{ nên } 4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Đồ thị (T) tồn tại khi } m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$$

Đồ thị (P) với $a = 1$ và đồ thị (T) tiếp xúc khi và chỉ khi phương trình: $x^2 = (m-1)x - (m-1)$ (*) có nghiệm kép

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x + (m-1) = 0$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-1) = m^2 - 6m + 5$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$$

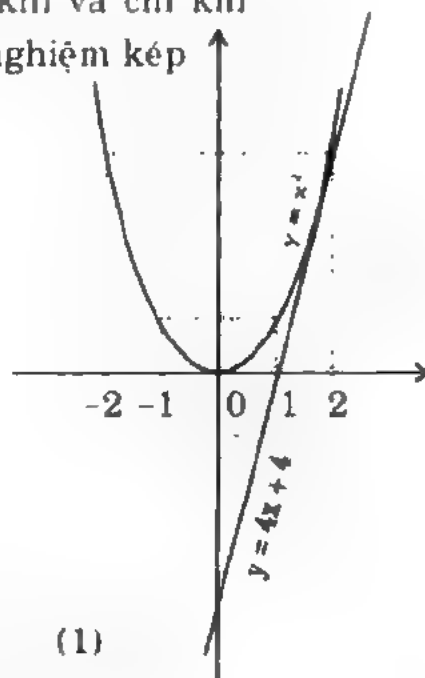
$$\Rightarrow m = 1 \text{ (loại)}, m = 5$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{m-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Vậy với $a = 1; m = 5$ thì tọa độ

tiếp điểm của (P) và (T) là (2; 4)

$$b) \quad \text{Đồ thị của (P) và (T) với } a = 1, m = 5 :$$



Câu 3.

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-3 = 0 \quad (m \neq -1) \quad (1)$$

$$a) \quad \text{Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khi } \Delta' \geq 0$$

$$\Delta = [-(m-1)]^2 + (m+1)(m-3) = 4 \geq 0, \forall m$$

Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, $\forall m$

$$x_1, x_2 > 0 \text{ khi: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{m-3}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}; 3x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2(m-1)}{3(m+1)} \rightarrow x_1 = \frac{3(m-3)}{m-1}$$

Ta có phương trình: $\frac{3(m-3)}{2(m-1)} - \frac{4(m-1)}{3(m+1)}$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m - 27 = 8m^2 - 16m + 8$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = -5 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $m = 7$; $m = -5$

Câu 4.

- a) Ta có: $OA \perp DE \Rightarrow MD = ME$; $MA = MB$
nên tứ giác $ADBE$ là hình bình hành
Hình bình hành $ADBE$ có $DE \perp AB$,
do đó $ADBE$ là hình thoi

- b) Ta có: $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn
nửa đường tròn đường kính BC)
nên $BI \perp DC$

Vậy $AD \parallel BI$, $AD \parallel BE$ (vì $ADBE$ là hình thoi), mà qua B ngoài AD
chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với AD nên
 $BI \equiv BE$ hay B, E, I thẳng hàng.

- c) Xét $\triangle EID$ có IM là trung tuyến nên $MI = ME$, do đó $\triangle MET$ cân, suy
ra $\widehat{MEI} = \widehat{MIE}$ (1)

Xét tam giác vuông MEB có: $\widehat{MEB} + \widehat{MBE} = 90^\circ$, mà $\widehat{MBE} = \widehat{IBO'}$
nên $\widehat{MEB} + \widehat{IBO'} = 90^\circ$ (2)

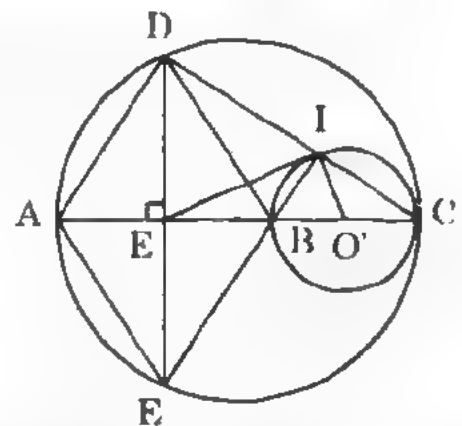
Từ (1) và (2) có: $\widehat{IBO'} + \widehat{MIB} = 90^\circ$ (3)

Tam giác $O'IB$ cân nên: $\widehat{IBO'} = \widehat{O'IB}$ (4)

Từ (3) và (4) có: $\widehat{MIB} + \widehat{O'IB} = \widehat{MIO'} = 90^\circ$, suy ra $MI \perp O'I$

$\triangle MIB \sim \triangle MCI$ (vì có \widehat{M} chung và $\widehat{MIB} = \widehat{MIC}$) $\Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{MB}{MI}$

$\Rightarrow MI^2 = MB \cdot MC$ (đpcm)



ĐỀ 10

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

$$a) x^4 - 5x^2 - 9 = 0 \qquad b) \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases}$$

Câu 2. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m, nếu tăng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m thì diện tích tăng thêm 45m². Hãy tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn

Câu 3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) P = \sqrt{x} - \sqrt{x^2} - 4 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} - 4 \quad \text{với } x > 2$$

$$b) Q = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{với } a > 0; b > 0$$

Câu 4. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2r$. C là trung điểm của cung AB . Trên cung AC lấy điểm F bất kì. Trên dây BF lấy điểm E sao cho $BE = AF$

- Lưu tam giác AFC và BEC quan hệ với nhau như thế nào? Tại sao?
- Chứng minh EFC là tam giác vuông cân
- Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn. Chứng minh $BECD$ là một tứ giác nội tiếp
- Gả sử F chuyển động trên cung AC . Chứng minh rằng khi đó E chuyển động trên một cung tròn. Hãy xác định cung tròn và bán kính cung tròn đó

Giải

Câu 1. a) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$), phương trình đã cho tương đương với:

$$4y^2 - 5y - 9 = 0$$

Giải phương trình này, ta được: $y_1 = -1$ (loại); $y_2 = \frac{9}{4}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$.

$$b) \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 21 \\ 10x - 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = -26 \end{cases}$$

Câu 2. Gọi chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là

$$x \text{ (m)}, y \text{ (m)} \quad (0 < x, y < 17), \text{ ta có: } x + y = 17 \quad (1)$$

Nếu tăng chiều dài 3m và tăng chiều rộng 2m thì chiều dài, chiều rộng sẽ là $(x + 3)$ (m), $(y + 2)$ (m). Khi đó diện tích mảnh vườn tăng thêm 45m^2 , diện tích mảnh vườn khi chưa tăng thêm các cạnh là $x.y$ (m^2), ta có: $(x + 3)(y + 2) - xy = 45$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được: $x = 12, y = 5$. Thử lại thấy thỏa điều kiện. Vậy chiều dài của mảnh vườn là 12m, chiều rộng của mảnh vườn là 5m

Câu 3.

$$\text{a) } P = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow P^2 &= x - \sqrt{x^2 - 4} + x + \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})} \\ &= x + x + 2\sqrt{x^2 - x^2 + 4} = 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \sqrt{2(x + 2)}$$

$$\text{b) } Q = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ với } a \geq 0; b \geq 0$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right] : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right] : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= (a - 2\sqrt{ab} + b) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1$$

Câu 4.

a) Vì C là trung điểm của cung \widehat{AB} nên

$$\widehat{AC} = \widehat{CB} \Rightarrow AC = CB$$

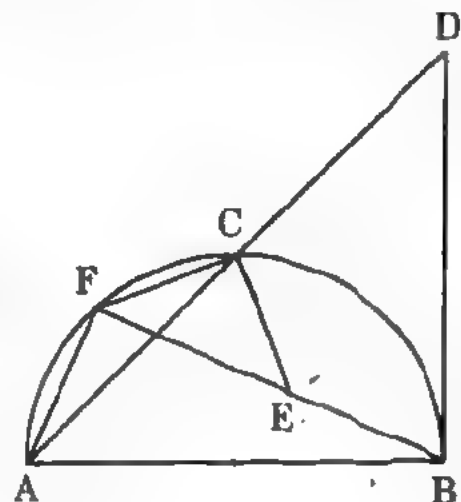
$$\widehat{CAF} = \widehat{CBF} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{FC})$$

Mặt khác: $AF = BE$ (giả thiết)

Vậy $\triangle AFC = \triangle BEC$ (c.g.c)

b) Theo câu a) ta có: $CE = CF \Rightarrow \triangle ECF$ cân ở C

Vì $\widehat{CFE} = 45^\circ$ (vì cung CB bằng $\frac{1}{4}$ đường



tròn) = \widehat{CEF} , nên $\widehat{FCE} = 180^\circ - (\widehat{CFE} + \widehat{CEF}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Do đó $\triangle ECF$ vuông cân ở C

- c) BD là tiếp tuyến nên $BD \perp AB \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ$, vì $\widehat{DAB} = 45^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung \widehat{BC}) nên $\widehat{ADB} = 45^\circ$, $\widehat{BEC} = \widehat{BEF} - \widehat{FEC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Tứ giác BDEC có $\widehat{CDB} + \widehat{BEC} = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác BDEC nội tiếp được đường tròn

- d) Theo chứng minh trên thì E luôn luôn ở trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DCB. Vì $\widehat{DCB} = 90^\circ$ nên đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle DCB$ là DB

Biết rằng F chuyển động trên cung AC của nửa đường tròn đường kính AB nên khi $F \equiv A \Rightarrow E \equiv B$ và khi $F \equiv C$, do đó ta suy ra E chuyển động trên cung nhỏ BC của đường tròn đường kính BD

Vì tam giác ABD vuông tại B có $\widehat{ADB} = 45^\circ$ nên nó vuông cân, suy ra: $BD = AB = 2r$. Vậy E chuyển động trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BECD có bán kính bằng r.

ĐỀ 11

Câu 1. Cho biểu thức:

$$M = \frac{(1-x)^3(1-x)^2}{1+x^2} : \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x} + x \right) \left(\frac{1+x^3}{1-x} - x \right) \right] \quad \text{với } x \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức M

b) Tìm giá trị của x để $M = \frac{1}{5}$

c) Tính giá trị của M khi $|x - 5| = 4$

Câu 2. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P)

1) Tìm a, b biết rằng (D) đi qua A(-1; 3) và B(2; 0)

2) Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P)

Câu 3. Một hợp kim đồng và kẽm trong đó có 5 gam kẽm. Nếu thêm 15 gam kẽm vào hợp kim này thì được một hợp kim mới mà trong hợp kim đó lượng đồng đã giảm so với lúc đầu là 30%. Tìm khối lượng ban đầu của hợp kim.

Câu 4. Cho phương trình: $x^2 - 4x\sqrt{3} + 8 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 .
Không giải phương trình trên, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 3x_1^3x_2}$$

Câu 5. Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định và một đường kính EF bất kì (E khác A và B). Tiếp tuyến tại B với đường tròn cắt tia AE , AF lần lượt tại H và K . Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt HK tại M

- Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình chữ nhật
- Chứng minh tứ giác $EFKH$ nội tiếp được trong đường tròn
- Chứng minh AM là đường trung tuyến của ΔAHK
- Gọi P , Q là các trung điểm tương ứng của HB và BK , xác định vị trí của đường kính EF để tứ giác $EFQP$ có chu vi nhỏ nhất

Giải

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \frac{(1-x)^3(1+x)^2}{1+x^2} : \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x} + x \right) \left(\frac{1+x^3}{1-x} - x \right) \right] \\ &= \frac{(1-x)^3(1+x)^2}{1+x^2} : \left[\frac{1-x^3+x(1-x)}{1-x} \cdot \frac{1+x^3-x(1+x)}{1+x} \right] \\ &= \frac{(1-x)^3(1+x)^2}{1+x^2} \cdot \left[\frac{(1+x)^2 \cdot (1-x)^2}{1} \right] = \frac{1-x}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) Khi } M = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$\text{c) } |x-5| = 4 \Leftrightarrow x = 9$$

Thay giá trị $x = 9$ và biểu thức M đã được rút gọn ở câu a) ta được:

$$M = -\frac{4}{41}$$

Câu 2.

- Vì đường thẳng (D) đi qua hai điểm $A(1; 3)$ và $B(2; 0)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$. Giải ra ta được: $a = -1; b = 2$

Đường thẳng (D) là: $y = -x + 2$

- 2) Phương trình hoành độ giao điểm là đường thẳng (D) và parabol (P):
 $kx = -x + 2 \Leftrightarrow kx + x - 2 = 0$ (với $k \neq 0$) (*)
 (D) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép, tức là: $\Delta = 0$
 $1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$. Vậy phương trình (P) là $y = -\frac{1}{8}x^2$

Câu 3. Gọi x (kg) là khối lượng của hộp kim lúc đầu, thì khối lượng đồng có trong hộp kim lúc đầu là $(x - 5)$ kg

Tỉ lệ đồng có trong hộp kim là: $\frac{x - 5}{x} \cdot 100\%$

Khối lượng hộp kim lúc sau là: $(x + 15)$ kg

Tỉ lệ đồng có trong hộp kim lúc sau là: $\frac{x - 5}{x + 15} \cdot 100\%$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{x - 5}{x} \cdot 100 - \frac{x - 5}{x + 15} \cdot 100 = 30$

Giai phương trình trên ta được: $x_1 = 25$; $x_2 = 10$ (thỏa điều kiện)

Vậy khối lượng của hộp kim lúc đầu là 25kg hoặc 10kg

Câu 4.

Theo định lý Viet ta có: $P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a} = 8$; $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4\sqrt{3}$

$$M = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2} = \frac{6(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2}{5x_1x_2(x_2^2 + x_1^2)}$$

$$= \frac{6(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{5x_1x_2[(x_2^2 + x_1^2) - 2x_1x_2]}$$

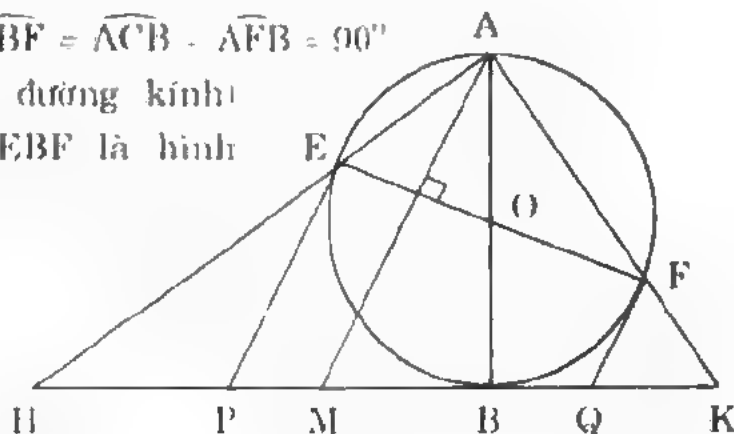
$$\text{Vậy } M = \frac{6(4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 8}{5 \cdot 8[(4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 8]} = \frac{6 \cdot 16 \cdot 3 - 16}{40(16 \cdot 3 - 16)} = \frac{17}{80}$$

Câu 5.

a) Ta có: $\widehat{EAF} = \widehat{EBF} = \widehat{ACB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$

(do cùng chắn đường kính)

nên tứ giác AEBF là hình chữ nhật



- b) Ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{ABE}$ (cùng chắn cung AE)
 $\widehat{ABE} = \widehat{BHA}$ (cùng phụ với góc HAB)
 Suy ra: $\widehat{AEF} = \widehat{BHA}$, do đó tứ giác HEFH nội tiếp
- c) Ta có: $\widehat{MAK} = \widehat{EFA} = 90^\circ$; $\widehat{MKA} = \widehat{MHA} = 90^\circ$ mà $\widehat{EFA} = \widehat{MHA}$, nên
 $\widehat{MAK} = \widehat{MKA}$, hay $\triangle MAK$ cân tại M
 Suy ra tam giác HMA cân tại M
 Vậy $HM = AM = MK$ và AM là trung tuyến của $\triangle HAK$
- d) Nếu P là trung điểm của HB thì $PE = PB$ (do $\triangle HEB$ vuông tại E)
 Vậy $\triangle PEO = \triangle PBO$, suy ra $PE \perp EO$
 Tương tự $QP \perp FO$. Tứ giác PEFQ là hình thang vuông có chu vi:
 $a = EF + PQ + (EP + FQ) = EF + 2PQ$
 Dễ thấy a bé nhất khi và chỉ khi $PQ = EF$. Khi đó $EF \perp AB$
 $\Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$. Vậy phương trình của (P) là: $y = -\frac{1}{8}x^2$

ĐỀ 12

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ b) $4x^4 - 4x + 1 = 0$ c) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

Câu 2. Cho biểu thức:

$$A = 1 : \left(\frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4 - x} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{3x - 4\sqrt{x}}{8(2 + \sqrt{x})^2(2 - \sqrt{x})} \right) \text{ với } x \neq 4$$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{20}$

Câu 3. Tìm các kích thước của hình chữ nhật có diện tích 40cm^2 , biết rằng nếu tăng mỗi kích thước thêm 3cm thì diện tích tăng 48cm^2 .

Câu 4. Vẽ Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (D): $y = -x + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O) có $AC > AB$. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, P là giao điểm của AB và CD. Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt tiếp tuyến của đường tròn tại D và cắt AD tại lần lượt E, Q

- a) Chứng minh $DE \parallel BC$ b) Chứng minh PACQ nội tiếp được
 c) Chứng minh $DE \parallel PQ$
 d) Chứng minh rằng nếu F là giao điểm AD và BC thì: $\frac{1}{CE} = \frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF}$

Giải

Câu 1.

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (*)

Đặt $X = x^2$ ($X \geq 0$)

(*) trở thành: $X^2 - 2X - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 4 \\ X_2 = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$

Do đó: $x^2 = X_1 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2$; $x = -2$

Câu 2.

$$\begin{aligned} A &= 1 : \left(\frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{3x}{4 - x} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{3x - 4\sqrt{x}}{8(2 + \sqrt{x})^2(2 - \sqrt{x})} \right) \\ &= 1 : \left[\frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} - \frac{2}{2(2 - \sqrt{x})} \right] \cdot \frac{3x - 4\sqrt{x}}{8(2 + \sqrt{x})^2(2 - \sqrt{x})} \\ &= 1 : \frac{2(2 - \sqrt{x}) + \frac{3x}{2} \cdot 2 - 2(2 + \sqrt{x})}{2(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \cdot \frac{3x - 4\sqrt{x}}{8(2 + \sqrt{x})^2(2 - \sqrt{x})} \\ &= 1 : \frac{4 - 2\sqrt{x} + 3x - 4 - 2\sqrt{x}}{2(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \cdot \frac{3x - 4\sqrt{x}}{8(2 + \sqrt{x})^2(2 - \sqrt{x})} \\ &= 1 : \frac{3x - 4\sqrt{x}}{2(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \cdot \frac{3x - 4\sqrt{x}}{8(2 + \sqrt{x})^2(2 - \sqrt{x})} \\ &= 1 : \frac{2(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})}{3x - 4\sqrt{x}} \cdot \frac{3x - 4\sqrt{x}}{8(2 + \sqrt{x})^2(2 - \sqrt{x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

b) $A = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{4(2 + \sqrt{x})} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow 4(2 + \sqrt{x}) = 20 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$

Vậy $x = 9$ thoả $A = \frac{1}{20}$

Câu 3. Gọi x (cm), y (cm) là các kích thước của hình chữ nhật

Diện tích hình chữ nhật là: $xy = 40 \text{ cm}^2$ (1)

Khi tăng mỗi kích thước 3cm thì diện tích hình chữ nhật là:

$$(x + 3)(y + 3) \text{ (cm}^2\text{)}$$

Theo đề bài, ta có: $(x + 3)(y + 3) - xy = 48 \Leftrightarrow x + y = 13$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được: $x = 8$; $y = 5$

Vậy các kích thước hình chữ nhật là: 8 (cm) và 5 (cm)

Câu 4.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = -x + 2$			2		0

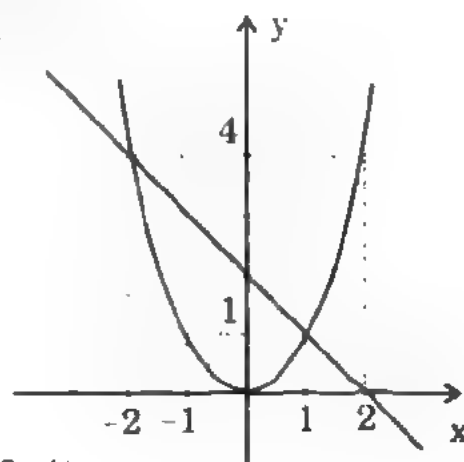
Giao điểm của (P) và (D) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

Suy ra: $y_1 = 1$; $y_2 = 4$

Vậy (D) cắt (P) tại hai điểm A(1; 1) và B(-2; 4)



Câu 5.

a) Dễ thấy $\widehat{CDE} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD} = \widehat{BCD}$

Hai góc này ở vị trí so le trong nên $DE \parallel BC$

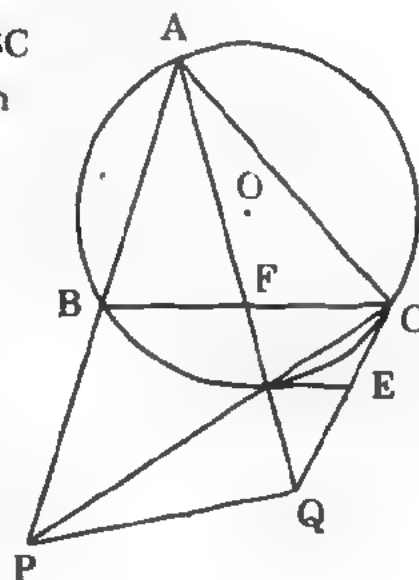
b) Theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và một cát tuyến ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{AQC} &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AC} - \text{sđ } \widehat{DC}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AC} - \text{sđ } \widehat{BD}) = \widehat{APC} \end{aligned}$$

Hai điểm P, Q cùng nhìn AC dưới một góc và ở về cùng một phía đối với AC nên chúng thuộc một đường tròn

c) Do tứ giác ACQP nội tiếp nên ta có:

$$\widehat{CPQ} = \widehat{CAQ} \text{ (cùng chắn } \widehat{CQ}) \quad (1)$$



Mặt khác đối với đường tròn (O) ta có

$$\widehat{DE} = \widehat{AD} \text{ (cung chắn } \widehat{CD}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DE} = \widehat{PQ}$. Do đó $DE \parallel PQ$

d) Ta có:
$$\frac{1}{CE} = \frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF} \Leftrightarrow \frac{CE}{CQ} + \frac{CE}{CF} = 1 \quad (3)$$

Để chứng minh (3), ta nhận thấy do $DE \parallel BC$ và $DE = EC$ nên:

$$\frac{CE}{CF} = \frac{DE}{CF} = \frac{EQ}{QC}. \text{ Từ đó: } \frac{CE}{CQ} + \frac{CE}{CF} = \frac{CE}{CQ} + \frac{EQ}{CQ} = 1$$

ĐỀ 13

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $P = \frac{x+5-5\sqrt{x-1}}{x-1-3\sqrt{x-1}}$

b) $Q = \frac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

Câu 2. Xác định hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$ (d) trong các trường hợp:

a) Đồ thị của (d) là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ và đi qua $A(2; -2)$

b) Đồ thị của (d) là đường thẳng cắt parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm có hoành độ các giao điểm là -1 và 3

Câu 3. Hai công nhân nếu làm chung thì hoàn thành một công việc trong 4 ngày. Người thứ nhất làm một nửa công việc, sau đó người thứ hai làm nốt nửa công việc còn lại thì toàn bộ công việc sẽ được hoàn thành trong 9 ngày. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc đó trong bao nhiêu ngày

Câu 4. Cho đường tròn (O) bán kính R , một dây AB cố định ($AB < 2R$) và một điểm bất kì M trên cung lớn AB (M khác A, B). Gọi I là trung điểm của dây AB và (O') lần lượt là đường tròn qua M , tiếp xúc AB tại A . Đường thẳng MI cắt (O), (O') lần lượt tại giao điểm thứ hai là N, P . Chứng minh rằng:

a) $IA^2 = IP \cdot IM$

b) Tứ giác $ANBP$ là hình bình hành

c) IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MBP$

d) Khi M di chuyển thì trọng tâm G của ΔPAB chạy trên một cung tròn cố định.

Câu 5. Cho x, y là hai số thực thoả mãn $(x+y)^2 + 7(x+y) + y^2 + 10 = 0$
 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + 1$

Giải

Câu 1.

a) Đặt $\sqrt{x-1} = a$ thì $x = a^2 + 1$, ta có:

$$P = \frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 3a} = \frac{(a-2)(a-3)}{a(a-3)} = \frac{a-2}{a-3} = \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}}$$

b) Đặt $\sqrt[3]{a} = x, \sqrt[3]{b} = y$ ta có:

$$Q = \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)}{x^2 + xy + y^2}$$

$$= x^2 + y^2 - xy = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}$$

Câu 2.

a) Vì (d) song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ nên $a = -3$

(d) đi qua $A(2; -2)$, ta có: $-2 = -3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4$

Vậy $a = -3; b = 4$ và (d): $y = -3x + 4$

b) Tọa độ giao điểm của (d) và parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ là: $A\left(-1; \frac{1}{2}\right); B\left(3; \frac{9}{2}\right)$

Ta có: $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$ nên (d): $y = x + b$

Vì (d) đi qua $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ nên ta có: $\frac{1}{2} = -1 + b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Vậy $a = 1; b = \frac{3}{2}$ và (d): $y = x + \frac{3}{2}$

Câu 3. Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất làm xong công việc ($x > 4$), thì thời gian để một mình người thứ nhất làm xong nửa công việc là $\frac{x}{2}$ (ngày)

Thời gian để người thứ hai làm xong một nửa công việc là $9 - \frac{x}{2}$ (ngày)

Do đó người thứ hai làm xong cả công việc trong

$$2\left(9 - \frac{x}{2}\right) = 18 - x \text{ (ngày)}$$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{18-x} = \frac{1}{4}$

Giải phương trình trên, ta được: $x_1 = 12, x_2 = 6$ (thỏa điều kiện)

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất làm xong công việc trong 12 ngày, người thứ hai làm xong công việc trong 6 ngày

Câu 4.

a) Xét hai tam giác IAP và IMA có:

góc I chung và $\widehat{AMI} = \widehat{PAI}$ (vì cùng chắn AP)

Suy ra: $\triangle IAP \sim \triangle IMA$

Do đó: $\frac{IA}{IP} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow IA^2 = IP \cdot IM$ (đpcm)

b) Ta có: $\widehat{ABN} = \widehat{AMN}$ (cùng chắn \widehat{AN});

$\widehat{AMN} = \widehat{PAB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AP \parallel BN$ (có hai góc ở vị trí so le bằng nhau)

Ngoài ra: $AI = BI$ nên $AP = BN$

Vậy APBN là hình bình hành

c) Giả sử Bx là tiếp tuyến của đường tròn

ngoại tiếp $\triangle MPB$. Khi đó: $\widehat{OBP} = \widehat{PMB}$

(cùng chắn \widehat{PB})

Mặt khác trong đường tròn (O), ta có:

$\widehat{PMB} = \widehat{NAB}$ (cùng chắn \widehat{NB})

$\widehat{NAB} = \widehat{IBP}$ (do $PB \parallel AN$)

Vậy $\widehat{OBP} = \widehat{IBP}$ và xB trùng với IB

Do đó IB là tiếp tuyến của đường tròn

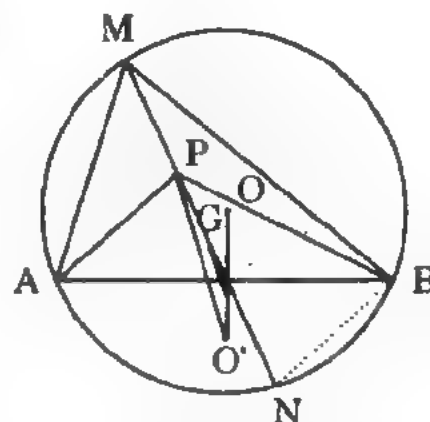
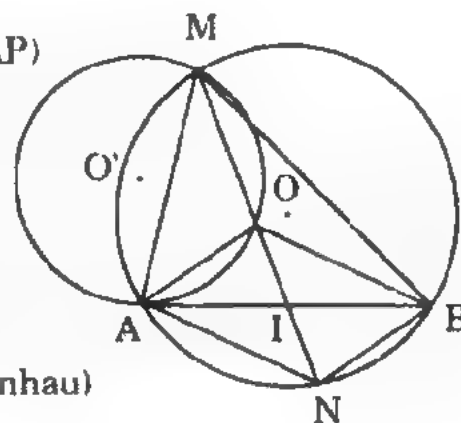
ngoại tiếp $\triangle MPB$

d) Khi M di động trên cung lớn AB thì N di động trên cung nhỏ AB.

Điểm P đối xứng với điểm N qua I nếu lấy điểm O' đối xứng với O qua I thì P chạy trên cung tròn (O'); R

Trên IO' lấy điểm E sao cho $IE = \frac{IO'}{3}$. Do đó: $GE = \frac{PO'}{3} = \frac{R}{3}$

Vậy G chạy trên cung tròn $\left(E; \frac{R}{3}\right)$



Câu 5. Theo giả thiết ta có: $(x+y)^2 + 7(x+y) + y^2 + 10 = 0$

$$\Rightarrow (x+y)^2 + 2 \cdot (x+y)^2 \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10 = -y^2 \leq 0$$

$$\left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left|x + y + \frac{7}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \text{ hay } -\frac{3}{2} \leq x + y + \frac{7}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -4 \leq P = x + y + 1 \leq -1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -4 và giá trị lớn nhất của P là -1

ĐỀ 14

Câu 1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $|2x - 1| = |2x - 3|$ b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8$ c) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Câu 2. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{a - \sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2}{a - 1} \right)$

- Rút gọn Q
- Tính giá trị của Q khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$
- Tìm giá trị của a sao cho $Q < 0$

Câu 3. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật nên tổ I đã vượt mức kế hoạch 18% và tổ hai đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian qui định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao mỗi tổ theo kế hoạch là bao nhiêu?

Câu 4.

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng (d) đi qua điểm O(0; 0) và điểm $A\left(\frac{1}{2}; -2,5\right)$
- Hỏi rằng đường thẳng (d) là đồ thị hàm số nào?

Câu 5. Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi BD, CE là hai đường cao của ΔABC

- Chứng tỏ 4 điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn, xác định tâm I của đường tròn này và chứng minh $OI \perp BC$
- Chứng minh: $AD.AC = AE.AB$
- Gọi (d) là tiếp tuyến tại A của (O), chứng minh $DE \parallel (d)$
- Gọi K là trung điểm DE, chứng minh rằng hai đường thẳng d và IK vuông góc nhau

Giải

Câu 1.

$$a) \quad 2x - 11 = 2x + 3 \quad (1)$$

Dễ thấy hai vế của (1) không âm, nên ta có:

$$(1) \quad : 2x - 11^2 = 2x + 3^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 + 12x + 9 \quad : 8x = 8 \quad : x = 1$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1$

$$b) \quad \sqrt{x^2 + 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} + x = 8 \Leftrightarrow |x+2| + x = 8 \quad (2)$$

• Nếu $x \geq -2$ thì: (2) $\Leftrightarrow x + 2 + x = 8 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

• Nếu $x < -2$ thì: (2) $\Leftrightarrow 2 - x + x = 8$, vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 3$

$$c) \quad \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (1; -1)

Câu 2.

$$a) \quad C = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{a-\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2}{a-1} \right), \text{ Điều kiện } a > 0; a \neq 1$$
$$= \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{a-1} \right) = \frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

$$b) \quad a = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{3 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 2$$

$$c) \quad \text{Với } a > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > 0. \text{ Do đó } Q = \frac{a-1}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow a-1 < 0 \Rightarrow a < 1$$

Vậy $Q < 0$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$

Câu 3. Gọi x là số sản phẩm tổ I hoàn thành theo kế hoạch ($0 < x < 600$)

Số sản phẩm mà tổ II hoàn thành theo kế hoạch là $600 - x$

Số sản phẩm vượt mức của tổ I là: $\frac{18x}{100}$

Số sản phẩm vượt mức của tổ II là: $\frac{(600 - x) \cdot 21}{100}$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{18x}{100} + \frac{(600 - x) \cdot 21}{100} = 120$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 200$

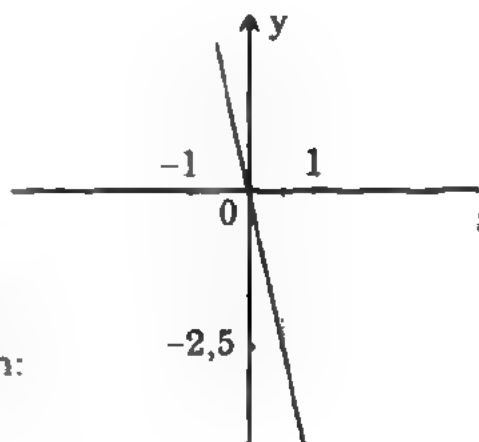
Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 200 sản phẩm, số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 400 sản phẩm

Câu 4.

a) Dựng điểm $A\left(\frac{1}{2}; -2,5\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm $O(0; 0)$

và $A\left(\frac{1}{2}; -2,5\right)$ như hình vẽ



b) Đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ nên có phương trình: $y = ax$

Vì điểm A thuộc đường thẳng (d) nên:

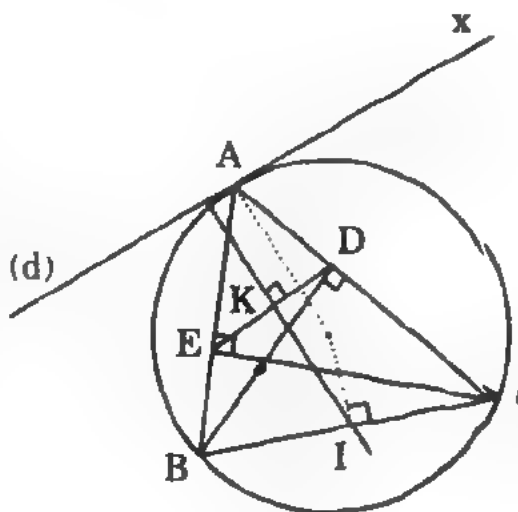
$$\frac{1}{2}a = -2,5 \Rightarrow a = -5. \text{ Vậy (d) : } y = -5x$$

Câu 5:

a) Hai điểm D và E cùng nhìn BC dưới góc vuông nên 4 điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC và có tâm I là trung điểm BC

Tam giác OBC cân ($OB = OC = R$)

Nên trung tuyến OI cũng là đường cao nên: $OI \perp BC$



b) $\triangle ABD \sim \triangle ACF$ (vì có góc nhọn \widehat{A}

chung và $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$), suy ra: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AB \cdot AE = AD \cdot AC$

c) Tại đỉnh D của tứ giác BEDC nội tiếp:

\widehat{ADE} là góc ngoài và \widehat{BEC} là góc đối diện với góc trong \widehat{EDC} nên $\widehat{ADE} = \widehat{EBC}$ (cùng bù với \widehat{EDC})

Ta lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{CAx}$ (góc nội tiếp chắn cung \widehat{AC} và góc giữa tiếp tuyến Ax và dây cung AC có số đo bằng $\frac{1}{2}$ số \widehat{AC})

Suy ra: $\widehat{ADE} = \widehat{DAx}$. Hai góc này ở vị trí so le trong nên $DE \parallel (d)$

d) Ta có: $\triangle IDE$ cân tại I (vì ID và IE là bán kính của đường tròn I))

nên trung tuyến IK cũng là đường cao: $IK \perp DE$

Ta lại có: $(d) \parallel DE$ (theo chứng minh trên)

Vậy đường thẳng IK vuông góc với (d)

ĐỀ 15

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$

- a) Put gon P b) Tim các giá trị của x để $P > 0$
c) Tim các giá trị của x để $P = -2$

Câu 2.

- a) Giải phương trình: $\frac{5}{x^2 - 4x + 5} - x^2 + 4x + 1 = 0$
- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 đường thẳng có phương trình:
 $(l_1): y = \frac{1}{2}x + 4; (d_2): y = 2$ và $(d_3): y = (k + 1)x + k$

Tim k để 3 đường thẳng đã cho đồng quy

Câu 1. Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 5 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng họp không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy ?

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và điểm E là điểm chính giữa cung AB . Hai dây EC, ED cắt AB theo thứ tự tại F, Q . Các dây AD và EC kéo dài cắt nhau tại I . Các dây BC và ED cắt nhau tại K . Chứng minh rằng:

- a) Tỷ giác $CDIK$ nội tiếp
b) Tỷ giác $CDQP$ nội tiếp
c) $IK \parallel AB$
d) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle AQD$ tiếp xúc với EA tại A

Câu 1. Cho hai số a và b khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Chứng minh

trung phương trình ẩn x sau luôn có nghiệm:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$$

Giải

Câu 1.

- a) $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$ Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$

$$P = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{x-1}\right] = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left(\frac{-4\sqrt{x}}{x-1}\right) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

$$b) \cdot P = \frac{1-x}{\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \quad (\text{vì } \sqrt{x} > 0) \Leftrightarrow x < 1. \text{ Vậy } P > 0 \text{ khi } x < 1$$

$$c) \quad P = \frac{1-x}{\sqrt{x}} = -2 \Leftrightarrow 1-x = -2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = (1 + \sqrt{2})^2 \quad (\text{vì } 1 - \sqrt{2} < 0)$$

Câu 2.

$$a) \quad \frac{5}{x^2 - 4x + 5} - x^2 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x^2 - 4x + 5 = t, \text{ khi đó: (1) trở thành: } \frac{5}{t} - (t - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 5 \end{cases} \quad \text{Hay: } \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = -1 \\ x^2 - 4x + 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0; x = 4$

$$b) \quad (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau tại điểm có tọa độ: } \frac{1}{2}x + 4 = 2 \Rightarrow I(-4; 2)$$

$$(d_3) \text{ đi qua } I(-4; 2) \text{ khi: } 2 = (k + 1)(-4) + k \Rightarrow k = -2$$

Vậy với $k = -2$ thì 3 đường thẳng (d_1) , (d_2) và (d_3) đồng quy

Câu 3. Gọi x là số dây ghế trong phòng lúc đầu (x nguyên và $x > 3$), thì $(x - 3)$ là số dây ghế lúc sau

$$\text{Số chỗ ngồi trên mỗi dây lúc đầu: } \frac{360}{x} \quad (\text{chỗ})$$

$$\text{Số chỗ ngồi trên mỗi dây lúc sau: } \frac{360}{x-3} \quad (\text{chỗ})$$

$$\text{Theo đề bài, ta có phương trình: } \frac{360}{x-3} - \frac{360}{x} = 4$$

$$\text{Giải phương trình ta được: } x_1 = 18; x_2 = -15 \text{ (loại)}$$

Vậy trong phòng có 18 dây ghế

Câu 4.

$$a) \quad \text{Ta có: } \widehat{CKD} = \frac{1}{2} (\text{Sđ } \widehat{DC} - \text{Sđ } \widehat{EB});$$

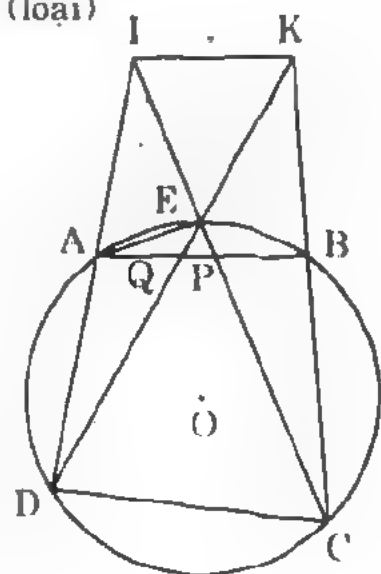
$$\widehat{CID} = \frac{1}{2} (\text{Sđ } \widehat{DC} - \text{Sđ } \widehat{AE})$$

$$\text{Vì } \widehat{EA} = \widehat{EB} \text{ nên } \widehat{CKD} = \widehat{CID}$$

Do đó tứ giác $CDIK$ nội tiếp

$$b) \quad \text{Tứ giác } CDQP \text{ nội tiếp khi và chỉ khi:}$$

$$\widehat{DCE} + \widehat{DQP} = 180^\circ \text{ hay } \widehat{DCE} = \widehat{EQB}$$



$$T \text{ có } \widehat{EQB} = \frac{1}{2}(\widehat{SAMD} + \widehat{SMBE}) = \frac{1}{2}(\widehat{SAMD} + \widehat{SMAE}) = \frac{1}{2}\widehat{SME} = \widehat{DTE}$$

Vậy tứ giác CDQP nội tiếp

c) Theo câu a) ta có: $\widehat{IKD} = \widehat{ICD}$ (cùng chắn ID)

Vì theo chứng minh câu b) ta có: $\widehat{ICD} = \widehat{KQB}$ (cùng bù với góc DQB)

Vậy $\widehat{IKD} = \widehat{KQB} \Rightarrow IK \parallel AB$ (có hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau)

d) Ta có: $\widehat{IDK} = \widehat{EAB}$ (chân hai cung bằng nhau)

Kéo tiếp tuyến Ax của đường tròn (AQD), ta có: $\widehat{BAx} = \widehat{IDK}$

Từ đó $\widehat{BAx} = \widehat{EAB}$, nên Ax // AE, hay AE là tiếp tuyến của đường tròn (AQD)

Câu 5. Xét phương trình: $(x^2 + ax + b) = 0$ có $\Delta_1 = a^2 - 4b$

Xét phương trình: $(x^2 + bx + a) = 0$ có $\Delta_2 = b^2 - 4a$

Do đó: $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a + b)$ mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a + b) = ab$

$$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a + b) = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$$

Từ đó suy ra có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Vậy phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$ luôn có nghiệm

ĐỀ 16

Câu 1

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + x\sqrt{3} + 3}} + \frac{3}{x^2 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị A khi $x = \sqrt{3} + 2$

Câu 2 Cho Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = x + b$

a) Với giá trị nào của b thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B?

b) Trong trường hợp $b = 4$, tìm tọa độ của A và B. Tính khoảng cách AB

Câu 3. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $4x - 5x + 9 = 0$ b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

Câu 4. Hai thành phố A và B cách nhau 120km. Lúc 7 giờ sáng một ô tô khởi hành từ A đi về B. Đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường thì xe hỏng máy

phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi lại tiếp tục đi nhưng với vận tốc ít hơn vận tốc dự định 8 km/h và đến B lúc 10 giờ. Hỏi ô tô hỏng lúc mấy giờ ?

Câu 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Đường kính AC của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai E . Đường kính AD của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F

- Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp
- Chứng minh C, B, D thẳng hàng và tứ giác $OO'EF$ nội tiếp
- Với điều kiện và vị trí nào của hai đường tròn (O) và (O') thì EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O')

Giải

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 3}{x^3 - (\sqrt{3})^3} \right) \left(\frac{x^2 + 3 + \sqrt{3}x}{x\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{x - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = \frac{1}{x - \sqrt{3}} \text{ với } x = \sqrt{3} + 2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Câu 2.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$\frac{x^2}{2} = x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2b = 0 \quad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt, tức là: $\Delta' = 1 + 2b > 0 \Leftrightarrow b > -\frac{1}{2}$

- Khi $b = 4$, $(*)$ trở thành: $x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (**)$

Giải $(**)$ ta được: $x = 4$; $x = -2$

Thay vào phương trình (d) : $y = x + 4$ ta được hai điểm $A(4; 8)$; $B(-2; 2)$ cần tìm

$$\text{Khoảng cách } AB \text{ là: } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$$

Câu 3.

$$\text{a) } 4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$$

$$\text{Đặt } y = x^2 \geq 0 \quad (*) \text{ suy ra: } 4y^2 - 5y - 9 = 0$$

Giải ra ta được: $y_1 = -1$ (loại); $y_2 = \frac{9}{4}$

Thay $y_2 = \frac{9}{4}$ vào (*) ta được: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{3}{2}$

b) Điều kiện: $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

Kh đó phương trình đã cho có dạng: $\frac{2x - 3}{x - 1} = 4$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = 4(x - 1) \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(-1; 5; -26)$

Câu 4. Gọi vận tốc dự định của ô tô là x km/giờ ($x > 8$) thì vận tốc của ô tô sau khi hỏng máy là $x - 8$ km/giờ

Thời gian ô tô chạy $\frac{2}{3}$ quãng đường với vận tốc dự định là $\frac{80}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô chạy quãng đường còn lại với vận tốc $x - 8$ km/giờ là $\frac{40}{x - 8}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{80}{x} + \frac{1}{3} + \frac{40}{x - 8} = 3$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 48$, $x_2 = 5$ (loại vì $x > 8$)

Do đó thời gian ô tô đi $\frac{2}{3}$ quãng đường là $\frac{80}{48}$ giờ = 1 giờ 40 phút và ô tô

hỏng máy lúc 7 giờ + 1 giờ 40 phút = 8 giờ 40 phút

Câu 5.

a) Ta có: $\widehat{CFA} = \widehat{DEA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hai điểm E, F cùng nhìn CD dưới một góc vuông nên tứ giác CDEF nội tiếp trong đường tròn đường kính CD

b) • Với đường tròn (O) ta có:

$\widehat{CBA} = 90^\circ$

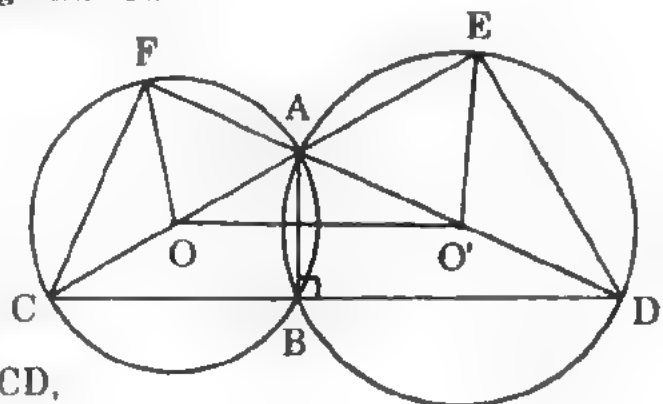
• Với đường tròn (O') ta có:

$\widehat{DBA} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{CBA} + \widehat{DBA} = 180^\circ$

Do đó C, B, D thẳng hàng

• Với đường tròn đường kính CD,



Ta có: $\widehat{EFD} = \widehat{ECD}$ (cùng chắn cung ED)

Mặt khác: $\widehat{ECD} = \widehat{EOO'}$ (đồng vị)

Suy ra: $\widehat{EFD} = \widehat{EOO'}$. Do đó tứ giác OO'EF nội tiếp được

c) Khi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') thì:

$$OF \perp EF; OE' \perp EF \Rightarrow \widehat{OFE} = \widehat{O'EF} = 90^\circ$$

Mà tứ giác OO'EF nội tiếp nên: $\widehat{FOO'} = \widehat{EOO'} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác OO'EF là hình chữ nhật, do đó $OF = O'E = R$ (1)

$$\text{Và } AF = AE = AO = AO' = R \Rightarrow OO' = R\sqrt{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hai đường (O) và (O') bằng nhau và có đoạn nối tâm $OO' = R\sqrt{3}$

ĐỀ 17

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2a+1}{a\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} \right) \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm a để $P \cdot \sqrt{1-a} < 0$

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) : $y = \frac{x^2}{4}$ và đường

thẳng (d) : $y = mx + n$. Tìm các giá trị của m, n biết đường thẳng (d) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) Song song với đường thẳng $y = x$ và tiếp xúc với parabol (P)

b) Đi qua điểm $A\left(\frac{3}{2}; -1\right)$ và tiếp xúc với parabol (P). Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (d) trong mỗi trường hợp trên

Câu 3. Một ô tô dự định từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 50km/giờ.

Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường với vận tốc đó, vì đường gồ ghề

nên người lái xe phải giảm vận tốc mỗi giờ 10km trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B chậm 30 phút so với dự định. Tính quãng đường AB

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính R và r ($R > r$) tiếp xúc ngoài tại P. Gọi PM và PN là hai đường kính của (O) và (O'). Dây QS của (O) vuông góc với MN tại trung điểm H của MN, QP kéo dài cắt (O') tại K

a) Tứ giác MNQS là hình gì?

b) Chứng minh ba điểm S, K, N thẳng hàng

c) QN cắt (O) tại I, chứng minh QK, SI và MN đồng quy

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Câu 5. Phân tích thành nhân tử biểu thức sau.

$$abca + bc + bcb + c + ca + a + 2abc$$

Giải

Câu 1.

a) Điều kiện: $a > 0; a \neq 1$ (*)

Đặt $P = A.B$

$$\text{Khi đó: } A = \left(\frac{2a+1}{a\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1} \right) = \frac{2a+1-\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)} = \frac{1}{\sqrt{a}-1}$$

$$B = (a - \sqrt{a} + 1) - \sqrt{a} = (\sqrt{a} - 1)^2$$

$$\Rightarrow P = A.B = \frac{1}{\sqrt{a}-1} \cdot (\sqrt{a}-1)^2 = \sqrt{a}-1$$

b) Điều kiện để $\sqrt{1-a}$ có nghĩa là: $a < 1$

Kết hợp với (*) ta có: $0 < a < 1$ nên $\sqrt{a} < 1 \Rightarrow P = \sqrt{a} - 1 < 0$

Mà $\sqrt{1-a} > 0$ nên $P.\sqrt{1-a} < 0$

Câu 2.

a) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x$ nên $m = 1$, ta có:

$y = x + n$. Đường thẳng $y = x + n$ tiếp xúc với parabol (P) khi và chỉ

khi phương trình: $\frac{x^2}{4} = x + n \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4n = 0$ có nghiệm kép,

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + 4n = 0 \Leftrightarrow n = -1$$

Khi đó: $x_1 = x_2 = 2$, từ đó $y = 1$. Tọa độ tiếp điểm của (d) và (P) là (2;1)

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ nên: $-1 = \frac{3}{2}m + n$

$$\Rightarrow n = -1 - \frac{3}{2}m \Rightarrow y = mx - 1 - \frac{3}{2}m$$

Đường thẳng $y = mx - 1 - \frac{3}{2}m$ tiếp xúc parabol (P) khi và chỉ khi phương

trình: $\frac{x^2}{4} = mx - 1 - \frac{3}{2}m \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 6m + 4 = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 6m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2; m = -\frac{1}{2}$$

Với $m = 2$, ta có $x = 4$; $y = 4$. Tọa độ tiếp điểm là $(4; 4)$

Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có $x = -1$; $y = \frac{1}{4}$. Tọa độ tiếp điểm là $(-1; \frac{1}{4})$

Câu 3. Gọi x (km) là độ dài quãng đường AB ($x > 0$)

Thời gian dự định của ô tô đi từ A đến B là: $\frac{x}{50}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu là: $\frac{2x}{3} : 50 = \frac{x}{75}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi $\frac{1}{3}$ quãng đường còn lại là: $\frac{x}{3} : 40 = \frac{x}{120}$ (giờ)

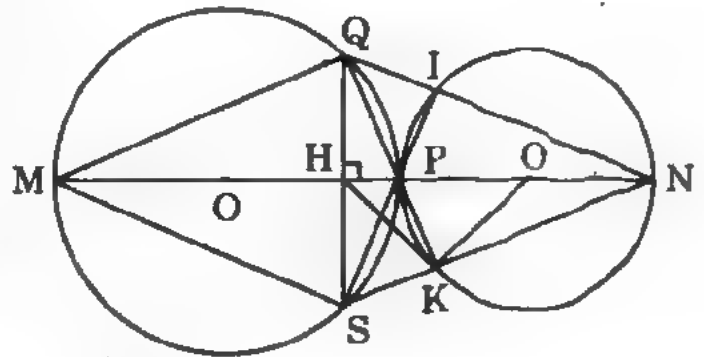
Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{x}{75} + \frac{x}{120} - \frac{x}{50} = \frac{1}{2}$

Giải phương trình trên ta được: $x = 300$ (thỏa điều kiện)

Vậy quãng đường AB là 300 km

Câu 4.

- a) Ta có tứ giác MNQS là hình bình hành vì hai đường chéo MN và QS cắt nhau tại trung điểm H của mỗi đường. Mặt khác $QS \perp MN$ tại H, suy ra tứ giác MNQS là hình thoi



- b) Theo câu a) thì $NS \parallel MQ$

Nối NK có $\widehat{MQK} = \widehat{NKP} = 90^\circ$ (vì các tam giác MQP và NKP vuông do đó có trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

Suy ra: $NK \parallel MQ$

Vậy $NS \parallel MQ$ và $NK \parallel MQ$ mà qua N chỉ có một đường thẳng duy nhất song song với MQ. Do đó ba điểm S, K, N thẳng hàng

- c) Ta có: $PI \perp QN$ và $SP \perp QN$. Nhưng qua P chỉ có một đường thẳng vuông góc duy nhất với QN. Do đó ba điểm S, P, I phải thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng QK, SI và MN phải đồng quy tại P và P là trực tâm của $\triangle QSN$

- ii) Xét tam giác vuông QKS có KM là trung tuyến nên $\triangle KHS$ cân

Do đó: $\widehat{QSN} = \widehat{HKS}$. Lại có $\widehat{PNS} = \widehat{O'KN}$, mà $\widehat{QSN} + \widehat{PNS} = 90^\circ$ nên:

$$\widehat{KHS} + \widehat{O'KN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HKO'} = 90^\circ$$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O')

Câu 5.

$$\begin{aligned}
& ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2ab \\
&= [ab(a+b) + abc] + [bc(b+c) + abc] + ca(c+a) \\
&= ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ca(c+a) \\
&= (a+b+c)(ab+bc) + ca(c+a) \\
&= b(a+b+c)(a+c) + ca(c+a) = (a+c)(ab+b^2+bc+a) \\
&= (a+c)[b(a+b) + c(a+b)] = (a+c)(a+b)(b+c)
\end{aligned}$$

ĐỀ 18**Câu 1.**

a) Giải phương trình: $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

b) Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}; \quad B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$$

Câu 2. Vẽ đồ thị hàm số (P) : $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (D) : $y = 2x + 3$

trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính

Câu 3. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 10km nên đến B trước ô tô thứ hai là $\frac{2}{5}$ giờ. Tính vận tốc mỗi xe

Câu 4. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R), hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H ($D \in BC$; $E \in AC$; $AB < AC$)

a) Chứng minh các tứ giác AEDB và CDHE nội tiếp

b) Chứng minh: $CE \cdot CA = CD \cdot CB$ và $DB \cdot DC = DH \cdot DA$

c) Chứng minh OC vuông góc với DE

d) Đường phân giác trong AN của góc A của ΔABC cắt BC tại N và cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN. Chứng minh KO và CI cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O)

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ với $x > 0$

Giải

Câu 1.

a) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

$$\Delta = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \rightarrow x_1 = -\sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\sqrt{3}; x = -\sqrt{2}$

b) $A = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right), \text{điều kiện: } x > 0; x \neq 1; x \neq 9 \\ &= \left(\frac{2x+1-x-\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1-x-4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}-1} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Câu 2.

Bảng giá trị:

x	-6	-2	0
$y = 2x + 3$	-9	-1	3

x	-6	-2	0	2
$y = -\frac{x^2}{4}$	9	-1	0	-1

Tọa độ giao điểm của (P) và (D)

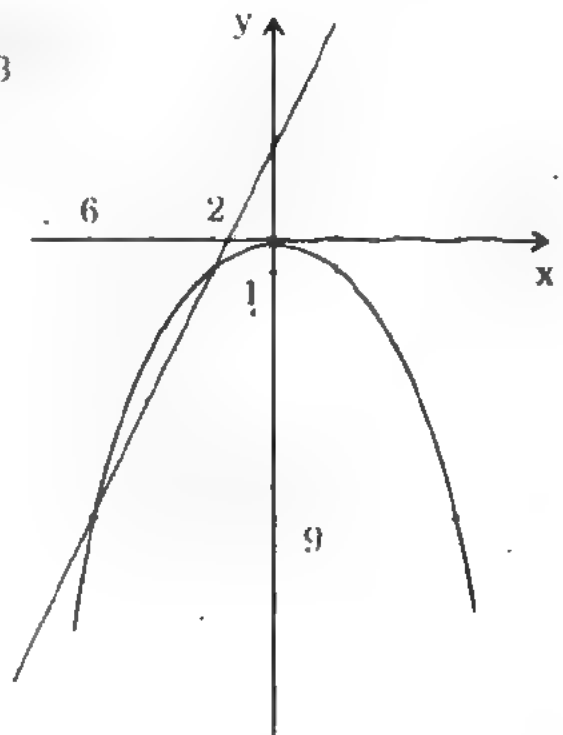
là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} y = -\frac{x^2}{4} \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 12 = 0 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6; y_1 = -9 \\ x_2 = -2; y_2 = -1 \end{cases}$$

Vậy (P) và (D) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A(-2, -1) và B(-6, -9)

Câu 3. Gọi x (km/h) là vận tốc ô tô thứ nhất ($x > 10$), thì $x - 10$ (km/h) là vận tốc ô tô thứ hai

- Thời gian ô tô thứ nhất đi đến B là: $\frac{120}{x}$ (giờ)



$$\text{Suy ra: } \widehat{ICN} + \widehat{NCK} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{\widehat{NIC}}{2} + \frac{\widehat{NIC}}{2} \Rightarrow \widehat{ICK} = 90^\circ$$

Do CI cắt (O) tại M nên ΔMCK vuông tại C và M, C, K \in (I)

Suy ra MK đi qua O

Vậy KO và CI cắt nhau tại $M \in (O)$

Câu 5. Ta có: $y = 2x + \frac{1}{x^2} = x + x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt{x \cdot x \cdot \frac{1}{x^2}} = 3$ (BĐT Côsi)

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = 1$

ĐỀ 19

Câu 1. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{8+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ b) $B = (\sqrt{10} + \sqrt{2})(6 - 2\sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

Câu 2. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^6 - 40x^3 + 351 = 0$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -25 \end{cases}$

Câu 3. Cho hàm số $y = (m - 2)x + n$ (d). Tìm các giá trị của m và n để đồ thị của hàm số:

- a) Đi qua hai điểm $A(-1; 2)$; $B(3; -4)$
b) Song song với đường thẳng: $3x + 2y = 1$

Câu 4. Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một lúc, đi từ A đến B. Vận tốc của họ hơn kém nhau 3km/h nên đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng quãng đường AB dài 30km

Câu 5. Trên đường tròn (O; R) đường kính AB lấy hai điểm M, E theo thứ tự A, M, E, B (hai điểm M, E khác nhau hai điểm A, B). AM cắt BE tại C, AE cắt MB tại D

- a) Chứng minh MCED là một tứ giác nội tiếp và $CD \perp AB$
b) Gọi H là giao điểm của CD và AB. Chứng minh $BE \cdot BC = BH \cdot BA$
c) Chứng minh các tiếp tuyến tại M và E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng CD
d) Cho biết $\widehat{BAM} = 45^\circ$ và $\widehat{BAE} = 30^\circ$. Tính diện tích ΔABC theo R

Giải

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{8+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(8+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{24+8\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4}{7} - \sqrt{2} - 3 - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= 4+2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 3 - 2 - \sqrt{2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= (\sqrt{10} + \sqrt{2})(6 - 2\sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)(6 - 2\sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} = (\sqrt{5} + 1)(6 - 2\sqrt{5})\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \\ &= (\sqrt{5} + 1)(6 - 2\sqrt{5})(\sqrt{5} + 1) = (6 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5}) = 36 - 20 = 16 \end{aligned}$$

Câu 2.

a) Đặt $y = x^3$, phương trình đã cho trở thành: $y^2 - 40y + 351 = 0$

$$\Delta' = 400 - 351 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 7 \Leftrightarrow y_1 = 27; y_2 = 13$$

$$\text{Với } y_1 = 27 \Rightarrow x_1 = 3; \text{ Với } y_2 = 13 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{13}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 3; x = \sqrt[3]{13}$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -25 \end{cases} \quad (\text{I})$$

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$. Đặt $X = \frac{1}{x}; Y = \frac{1}{y}$, phương trình (I) có dạng:

$$\begin{cases} X + Y = 10 \\ 2X - 3Y = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + 2Y = 20 \\ 2X - 3Y = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $\left(1; \frac{1}{9}\right)$

Câu 3.

a) Vì (d) đi qua hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(3; -4)$, nên ta có: $\begin{cases} -m + n = 0 \\ 3m + n = 2 \end{cases}$

$$\text{Giải ra ta được: } m = n = \frac{1}{2}$$

b) Phương trình $3x + 2y = 1$ có thể viết lại: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (1)

Điều kiện để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (1) là:

$$\begin{cases} m - 2 = -\frac{3}{2} \\ n \neq \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow m = \frac{1}{2} \vee n \neq \frac{1}{2}$$

Câu 4. Gọi vận tốc của người đi xe đạp với vận tốc chậm hơn là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc của người đi nhanh hơn là: $x + 3$ (km/h)

Thời gian của người đi xe đạp chậm hơn là: $\frac{30}{x}$ (giờ)

Thời gian của người đi xe đạp nhanh hơn là: $\frac{30}{x + 3}$ (giờ)

Do người đi xe đạp chậm hơn B sau 30 phút hay $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x + 3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

Giải phương trình trên và kết hợp với điều kiện ta được: $x = 12$ (km/h)

Câu 5.

a) $\widehat{AMB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra: $\widehat{CMD} = \widehat{CED} = 90^\circ$. Do đó MCDE nội tiếp đường tròn tâm I đường kính CD

Tam giác CAB có hai đường cao AE và BM cắt nhau tại trực tâm D.

Do đó CD là đường cao thứ ba. Suy ra: $CD \perp AB$

b) Ta có: $\triangle BEA \sim \triangle BHC$ (g - g) $\Rightarrow BE \cdot BC = BH \cdot BA$

c) Ta có: $IC = IM = ID = IE$

$$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{CMI}; \widehat{ACH} = \widehat{ABM}; \widehat{ABM} = \widehat{OMB}$$

$$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{OMB} \Rightarrow \widehat{CMI} + \widehat{IMD} = \widehat{OMB} + \widehat{IMD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MI \perp OM \Rightarrow MI \text{ là tiếp tuyến của đường tròn } (O)$$

Vậy tiếp tuyến tại M và E của (O) cắt nhau tại trung điểm I của CD

d) Khi $\widehat{BAE} = 30^\circ \Rightarrow BE = R$ và $AE = R\sqrt{3}$

$$\widehat{BAM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BDH} = 45^\circ \text{ và } \widehat{BEH} = 45^\circ$$

$$\text{Do đó EH là tia phân giác } \widehat{BEA} \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{EB}{EA}$$

- c) Từ O vẽ đường thẳng vuông góc với OE cắt AF tại M. Chứng minh tam giác MOA cân, suy ra BM là tiếp tuyến của đường tròn (O).
Tính AM theo R
- d) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác OAM và OFM (không tính diện tích từng tam giác)

Giải

Câu 1.

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right), \text{điều kiện: } x > 0, x \neq 4, x \neq 1$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left[\frac{4\sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) + 8x}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1 - 2(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \right] \\ &= \frac{8\sqrt{x} + 4x}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{4\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} : \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{4\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} : \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{4x(\sqrt{x} - 2)}{(2 - \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P = \frac{4}{\sqrt{x} - 3} = -1 \Leftrightarrow 4x = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(4\sqrt{x} - 3) = 0 \text{ Vì } x > 0 \text{ nên } x = \frac{9}{16}$$

Câu 2.

$$\text{a) } \frac{1}{x - 4} + \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{3}. \text{ Điều kiện: } x \neq \pm 4$$

$$\Leftrightarrow 3(x + 4) + 3(x - 4) = x^2 - 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8; x_2 = -2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 8; x = -2$

$$\text{b) } (2x - 1)(x + 4) = (x + 1)(x - 4) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - x - 4 = x^2 - 4x + x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(x + 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -10$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0; x = -10$

Câu 3.

a) (d') song song với (d) nên hệ số góc của (d') bằng -1; (d') đi qua M(0, m) nên: $m = 0 + b \Rightarrow b = m$

Vậy phương trình đường thẳng (d') là: $y = -x + m$

b) Đường thẳng (d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi phương trình:

$$x^2 = -x + m \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta = 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$$

Câu 4. Gọi x (km/h) ($x > 4$) là vận tốc thực của canô

Vận tốc xuôi dòng của canô là: $x + 4$ (km/h)

Vận tốc ngược dòng của canô là: $x - 4$ (km/h)

Thời gian canô đi đến lúc gặp bè nửa là: $8 : 4 = 2$ (giờ)

Thời gian ngược dòng đến chỗ gặp bè nửa của canô là: $\frac{16}{x-4}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = 2$

Giai phương trình trên ta được: $x_1 = 20$; $x_2 = 0$ (loại)

Vậy vận tốc thực của canô là 20 km/h

Câu 5.

a) $\triangle OAE$ vuông tại E có cạnh huyền

$OA = 2R$, $OE = R \Rightarrow AE = R\sqrt{3}$,

$\widehat{OAE} = 30^\circ$, $\widehat{AOE} = 60^\circ$

Ta có: $AE = AF$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $\triangle AEF$ cân tại A .

Mặt khác AO là phân giác

$\widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{FAO} = 30^\circ$

Vậy $\triangle AEF$ là tam giác đều có cạnh $AE = R\sqrt{3}$

b) $\triangle CEF$ cân tại C (vì AC là đường trung trực của EF)

Ta có: $\widehat{OCE} = \frac{1}{2} \widehat{EOA}$ (góc ngoài tam giác)

Do đó: $\widehat{ECF} = 2\widehat{OCE} = \widehat{EOA} = 60^\circ$

Suy ra $\triangle CEF$ là tam giác đều $CE = CF = EF = AE = AF$

Vậy $AECF$ là hình thoi với cạnh là $R\sqrt{3}$

Diện tích hình thoi $AECF$ là:

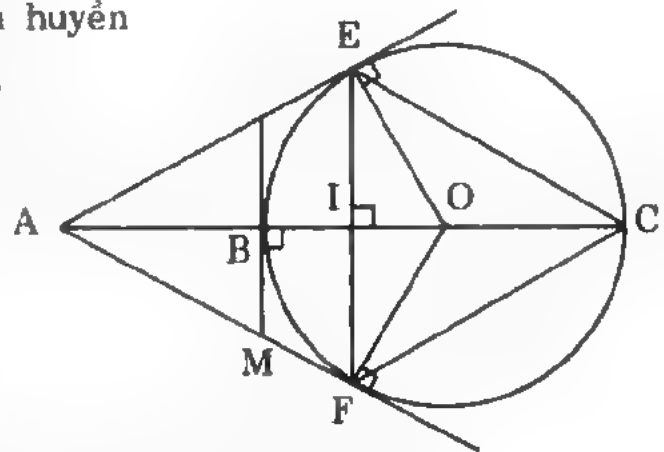
$D_{\text{hình thoi } AECF} = D_{\triangle AEF} + D_{\triangle CEF} = 2D_{\triangle AEF}$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} AI \cdot EF$ (do AI là đường cao của $\triangle AEF$)

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{EF\sqrt{3}}{2} \cdot EF = EF^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{2}$

c) Vì $DM \parallel AE$ (do cùng vuông góc với OE) nên có $\widehat{EAO} = \widehat{AOM}$,
 $\widehat{EAO} = \widehat{OAM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại A)

Do đó $\widehat{AOM} = \widehat{OAM}$, suy ra $\triangle MAO$ cân tại M



B là trung điểm của OA và $OB = R$

ΔMAO cân tại M có trung tuyến MB cũng là đường cao $BM \perp OB$

Vậy MB là tiếp tuyến của (O). Trong tam giác vuông ABM có góc

$$\widehat{MAB} = 30^\circ, AB = R, \text{ suy ra: } AM = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

d) Vì MF và MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) từ M, nên:

$$\Delta OFM = \Delta OMB \text{ mà } \Delta OMB = \Delta ABM \Rightarrow \frac{Dt_{(\Delta OAM)}}{Dt_{(\Delta OFM)}} = \frac{2Dt_{(\Delta OMB)}}{Dt_{(\Delta OFM)}} = 2$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TPHCM (2006 – 2007)

Câu 1. Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \left(2 + \sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right) \left(1 - \frac{2}{a + 1} \right)^2 \quad \text{với } a > 0, a \neq 1$$

Câu 2. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = \frac{3}{2}x + 2m$ cắt

parabol (P) : $y = -\frac{3}{4}x^2$ tại hai điểm phân biệt ?

Câu 3. Giải các phương trình và hệ phương trình:

a) $\sqrt{5 - x^2} = x - 1$

b)
$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 3 \end{cases}$$

c) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Câu 4.

a) Cho hai số dương x, y thỏa: $x + y = 3\sqrt{xy}$. Tính $\frac{x}{y}$

b) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

Câu 5. Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), có đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC

a) Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH

- b) Gọi F là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DHI và EHI . Chứng minh HF đi qua trung điểm của DE
- c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm F

Giải

Câu 1.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(2\sqrt{1+\sqrt{6}} - 2\sqrt{5} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \\
 &= \left(\sqrt{16+4\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) - \left(\sqrt{16+4(\sqrt{5}-1)} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \\
 &= \left(\sqrt{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) - \left(\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = (\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 10 - 2 = 8 \\
 B &= \left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2 = \left(\frac{a-2\sqrt{a+1}+a+2\sqrt{a+1}}{a-1} \right) \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 \\
 &= \frac{2(a+1)}{a-1} \cdot \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 = \frac{2(a-1)}{a+1}
 \end{aligned}$$

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $\frac{3}{2}x + 2m = -\frac{3}{4}x^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 8m = 0 \quad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}$

Vậy với $m < \frac{3}{8}$ thì (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Câu 3.

a) $\sqrt{5-x^2} = x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho

b) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 3 \end{cases} \quad (*)$

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$. Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$

$$(*) \text{ trở thành: } \begin{cases} 3u - 4v = 2 \\ 4u - 5v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Với $u = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

Với $v = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

c) Khi các điều kiện đã thỏa ta có: $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = \sqrt{2 - (x - 2)^2} \leq \sqrt{2}$
 $\sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{3 - 2(x - 2)^2} \leq \sqrt{3}$

Do đó: $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} \leq \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

Câu 4.

a) Ta có: $x + y = 3\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + 1 = 3\sqrt{\frac{x}{y}} \quad (*)$

Đặt $u = \sqrt{\frac{x}{y}}, u > 0$

(*) trở thành: $u^2 - 3u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{(3 \pm \sqrt{5})^2}{4}$

b) Vì vai trò của x và y là như nhau nên ta giả sử rằng: $x \geq y$

Khi đó, ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}; x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2$

$x \geq y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 4$. Do đó: $2 < y \leq 4$

Mặt khác y là số nguyên dương (giả thiết) nên $y = 3; y = 4$

Với $y = 3 \Rightarrow x = 6$. Do tính đối xứng ta cũng có $x = 3; y = 4$

Với $y = 4 \Rightarrow x = 4$. Cách khác ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x + y) = xy \Leftrightarrow 2x - xy + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 - y) - 2(2 - y) = -4 \Leftrightarrow (2 - x)(2 - y) = 4$$

Vì $x, y > 0$ nên $2 - x < 2, 2 - y < 2$. Do đó ta có các trường hợp sau:

$$2 - x = -1, 2 - y = -4 \Rightarrow x = 3, y = 6$$

$$2 - x = -4, 2 - y = -1 \Rightarrow x = 6, y = 3$$

$$2 - x = -2, 2 - y = -2 \Rightarrow x = 4, y = 4$$

Vậy ta có các cặp số nguyên (x, y) là: $(3; 6), (6; 3), (4; 4)$

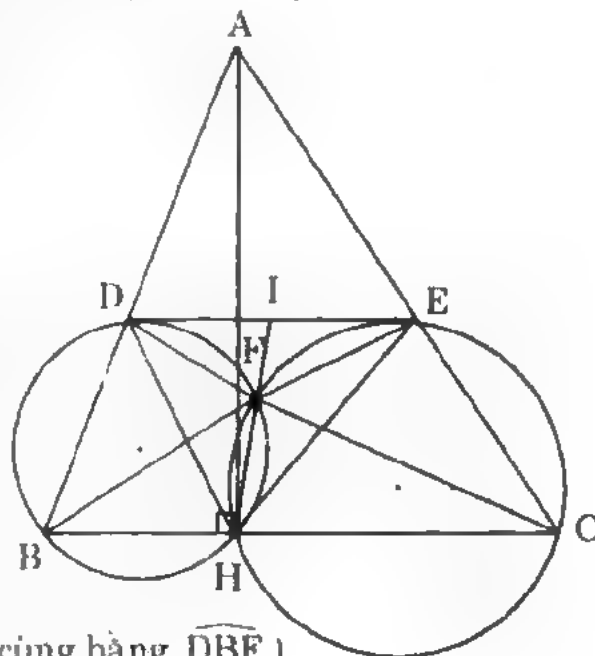
Câu 5.

a) Ta có: $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{BHD}$

Tại giác vuông ABH có HD là trung tuyến nên $DH = DB$, suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{DBH}$

Do đó $\widehat{HDE} = \widehat{DBH}$ suy ra DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH tại D

Tương tự, ta có DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp ADB và AEC



b) Ta có: $\widehat{IDF} = \widehat{IHD}$; $\widehat{IFD} = \widehat{IDH}$ (vì cùng bằng \widehat{DBF})

Do đó hai tam giác IDF và IHD đồng dạng

$$\text{Suy ra: } \frac{ID}{IH} = \frac{IF}{ID} \Rightarrow ID^2 = IF \cdot IH \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } IE^2 = IF \cdot IH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra, $ID = IE$ hay HF qua trung điểm I của DE

c) Do các tứ giác $BDEF$ và $CEFH$ nội tiếp nên ta có:

$$\widehat{DFH} + \widehat{DBH} = 180^\circ; \widehat{EFH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$$

$$\Delta AFC \text{ có: } \widehat{BAC} + \widehat{DBH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{DFH} + \widehat{EFH} + \widehat{DFE} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{DFE} = 180^\circ$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ qua F

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 KHỐI CHUYÊN ĐHKHTN (2006 – 2007)

Câu 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ (x + y)(1 + xy) = 4 \end{cases}$$

Câu 2. Với những giá trị của x thỏa mãn điều kiện $x > \frac{1}{2}$, hãy tìm giá

trị lớn nhất của biểu thức $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + 2\sqrt{x + 3} - 2x$

Câu 3. Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số thỏa mãn đồng thời hai tính chất

- 1) Khi chia số đó cho 100 ta được số dư là 6
- 2) Khi chia số đó cho 51 ta được số dư là 17

Câu 4. Cho hình vuông ABCD có cạnh $AB = a$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho $MN \parallel AC$, $PQ \parallel AC$ và $\widehat{AMQ} = 30^\circ$

- 1) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng MQ, C' là điểm đối xứng với C qua đường thẳng NP. Giả sử đường thẳng QA' cắt đoạn thẳng NP tại E, đường thẳng PC' cắt đoạn thẳng MQ tại F. Chứng minh rằng năm điểm E, F, Q, D, P nằm trên cùng một đường tròn
- 2) Biết $AC = 3MN$, tính diện tích hình thang MNPQ theo a

Câu 5. Chứng minh rằng với mỗi số dương a cho trước, đa thức:

$f(x) = x^4 + ax^2 + 2$ luôn là tổng bình phương của hai đa thức bậc hai

Giải

Câu 1.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ (x + 1)(1 + xy) = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(x + y) = 4 \\ (x + 1)(1 + xy) = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(x + y) = 4 \\ 1 + xy = x + y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(x + y) = 4 & (1) \\ (x - 1)(y - 1) = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Với $x = 1$, thay vào (1) ta được: $x = 1, y = 1$

Với $y = 1$, thay vào (1) ta được: $x = 1, y = 1$ hoặc $x = -3, y = 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 1); (-3; 1)$

Câu 2.

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + 2\sqrt{x + 3} - 2x = \sqrt{(2x + 1)(x + 2)} + \sqrt{4(x + 3)} - 2x$$

$$\text{Do } x \in \left[-\frac{1}{2}; 2 \right] \Rightarrow 2x + 1 \geq 0, x + 2 \geq 0, x + 3 \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a, b \geq 0)$, ta có:

$$\sqrt{(2x+1)(x+2)} \leq \frac{2x+1+x+2}{2} = \frac{3x+3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x+1 = x+2 \Rightarrow x = 1$

$$\sqrt{4(x+3)} \leq \frac{4+x+3}{2} = \frac{7+x}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $4 = x+3 \Leftrightarrow x = 1$

$$\text{Do đó, } f(x) \geq \frac{3x+3}{2} + \frac{7+x}{2} = 2x+5$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5, đạt được khi $x = 1$

Câu 3. Gọi số tự nhiên gồm 4 chữ số phải tìm là a , theo đề bài ta có

$a = 100n + 6 \equiv 51k + 17$, trong đó n và k là các nguyên dương

Do đó $100n - 50k \equiv k + 11 \Rightarrow k + 11$ chia hết cho 50. Mặt khác, vì a

có bốn chữ số nên $a = 51k + 17 \leq 9999 \Rightarrow k < \frac{9982}{51} < 196 \Rightarrow k + 11 < 217$

Do $k + 11 \vdots 5$ nên $k + 11$ chỉ có thể là 50, 100, 150 hoặc 200. Suy ra k chỉ có thể là 39, 89, 139 hoặc 189

Với $k = 39$, ta có: $a = 51 \cdot 39 + 17 = 2006$ (chia 100 dư 6)

Với $k = 89$, ta có: $a = 51 \cdot 89 + 17 = 4556$ (chia 100 dư 56)

Với $k = 139$, ta có: $a = 51 \cdot 139 + 17 = 7106$ (chia 100 dư 6)

Với $k = 189$, ta có: $a = 51 \cdot 189 + 17 = 9656$ (chia 100 dư 56)

Vậy có hai giá trị của a là: $a = 2006$ và $a = 7106$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 4.

1) Vì $\triangle BMN$ và $\triangle DPQ$ vuông cân nên

$AM = CN, AQ = CP$

$\Rightarrow \triangle AMQ = \triangle CNP$

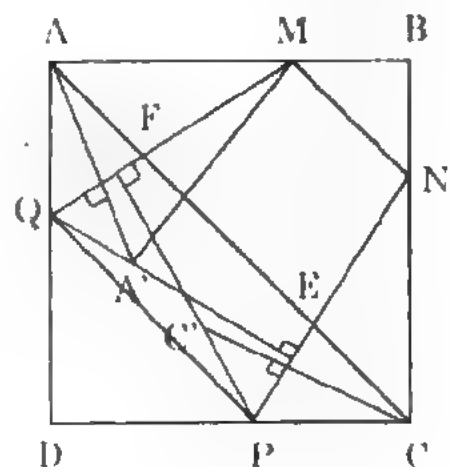
$\Rightarrow \widehat{CPN} = \widehat{AQM} = 60^\circ$

$\therefore \widehat{DPN} = 120^\circ$ hay $\widehat{DPE} = 120^\circ$

Do A' đối xứng với A qua QM

nên $\widehat{A'QM} = \widehat{AQM} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DQE} = 60^\circ$



$$\Rightarrow \widehat{PEQ} = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 120^\circ = 90^\circ$$

Tương tự ta có $\widehat{PFQ} = 90^\circ$

Suy ra năm điểm E, F, Q, P cùng nằm trên một đường tròn đường kính PQ

$$2) \text{ Do } \triangle MBN \sim \triangle ABC \text{ nên } \frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{1}{3} AB = \frac{a}{3} \Rightarrow AM = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Vì } AM = AQ\sqrt{3} \Rightarrow AQ = \frac{2a}{3\sqrt{3}} \Rightarrow QD = a - \frac{2a}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 2}{3\sqrt{3}} a$$

$$\text{Từ đó suy ra: } S_{MBN} = \frac{a^2}{18}; S_{AMQ} = S_{CNP} = \frac{2a^2}{9\sqrt{3}} \text{ và } S_{PDQ} = \frac{31 - 12\sqrt{3}}{54} a^2$$

$$\text{Do đó: } S_{MNPQ} = S_{ABCD} - S_{MBN} - S_{AMQ} - S_{CNP} - S_{PDQ} = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{27} a^2$$

Câu 5. Xét 2 trường hợp:

$$a) \Delta = a^2 - 8 \leq 0. \text{ Khi đó, ta có: } f(x) = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + 2 - \frac{a^2}{4} = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8-a^2}}{2}\right)^2$$

$$\text{Áp dụng hằng đẳng thức: } A^2 + B^2 = \frac{(A+B)^2}{2} + \frac{(A-B)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{\left(x^2 + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{8-a^2}}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(x^2 + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{8-a^2}}{2}\right)^2}{2} \\ &= \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{a + \sqrt{8-a^2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{a - \sqrt{8-a^2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \quad (\text{dpcm}) \end{aligned}$$

$$b) \Delta = a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a > 2\sqrt{2}. \text{ Khi đó, ta có:}$$

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{a - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} x + 1\right)^2 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{a - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} x + 1\right)^2 \quad (\text{dpcm})$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TP HCM (2006 – 2007)

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases} \quad b) 2x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0 \quad c) 9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$$

Câu 2. Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right) \quad (\text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 4)$$

Câu 3. Cho mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $360m^2$. Nếu tăng chiều rộng 2m và giảm chiều dài 6m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi mảnh đất lúc đầu

Câu 4.

a) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 4$ và $y = -\frac{x^2}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị ấy bằng phép tính

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và $AB < AC$. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và D

a) Chứng minh: $AD \cdot AC = AE \cdot AB$

b) Gọi H là giao điểm của BD và CE. Gọi K là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AH vuông góc với BC

c) Từ A vẽ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$

d) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng

Giải

Câu 1.

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = -3 \\ 10x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 17 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là: $(-11; 17)$

$$b) 2x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0 \text{ có } \Delta' = 3 + 6 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$; $x = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$.

c) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$. Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$)

$\Leftrightarrow 9y^2 + 8y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1; y_2 = \frac{1}{9}$ (vì $a + b + c = 1$)

So với điều kiện nhận nghiệm $y_2 = \frac{1}{9}$ với $y = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$

Câu 2.

$$A = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} - 2} - \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 2$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right) - \frac{(\sqrt{a} - 2)^2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)} - \frac{(\sqrt{a} + 2)^2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)} \cdot \frac{a - 4}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{-8\sqrt{a} \cdot a - 4}{a - 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = -8$$

Câu 3. Gọi chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật lúc đầu là: x (m), ($x > 0$)

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là: $\frac{360}{x}$ (m)

Chiều rộng mảnh đất sau khi tăng 2m là: $x + 2$ (m)

Chiều dài mảnh đất sau khi giảm 6m là: $\frac{360}{x} - 6$ (m)

Theo đề bài, ta có phương trình: $(x + 2) \left(\frac{360}{x} - 6 \right) = 360$

Giải ra ta được: $x = 10$; $x = -12$ (loại)

Vậy: Chiều rộng mảnh đất lúc đầu là: 10 (m)

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là: $\frac{360}{10} = 36$ m

Chu vi mảnh đất lúc đầu là: $(36 + 10) \cdot 2 = 92$ (m)

Câu 4.

a) Phương trình (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên (d) có dạng $y = 3x + b$. (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4: $4 = b$ hay $b = 4$. Vậy (d): $y = 3x + 4$

b) Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{2}$	-8	-2	0	-2	-8

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$: y = 2, y = x$$

Câu 5.

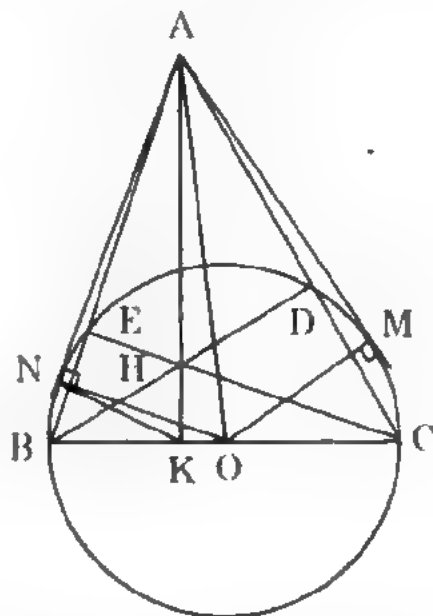
Suy ra: $\triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD.AC = AE.AB$

Mặt khác H là giao điểm của BD và CE nên H là trọng tâm của tam giác ABC . Suy ra $AH \perp BC$ (đpcm)

nên $\widehat{AON} = \frac{1}{2} \widehat{MON}$, suy ra:

$$\overline{AKN} = \overline{AON} \quad (2)$$

Do đó: $\frac{AN}{AB} = \frac{AE}{AN} \rightarrow AN^2 = AE \cdot AB$ (1)



Mặt khác: $\widehat{AEH} = \widehat{AKB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle AKB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AH \cdot AK \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $AN^2 = AH \cdot AK$

Xét hai tam giác ANH và ANK: \widehat{NAK} chung; $\frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AN}$

$\Rightarrow \triangle ANH \sim \triangle AKN$ (c - g - c). Do đó $\widehat{ANH} = \widehat{AKN}$

Suy ra hai tia NH và NK trùng nhau

Vậy 3 điểm M, H, N thẳng hàng

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 NGUYỄN TRÃI, HẢI PHÒNG (2005 - 2006)

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$, $x > 0$

và $x \neq 1$

1) Rút gọn biểu thức P

2) Tìm giá trị của x để $P = 3$

Câu 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(y-2) = (x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7) = (2x-7)(y+3) \end{cases}$$

Câu 3. Cho hai hàm số $y = mx + m^2 + \frac{9}{4}$ và $y = (4x^2 + 1)x^2$

Tìm giá trị của m để đồ thị hai hàm số trên cùng đi qua điểm $(-1; 2)$. Với hai giá trị m tìm được, xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị đó

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, hai đường phân giác BE và CF cắt nhau tại I (E trên AC, F trên AB) sao cho tứ giác AEIF nội tiếp một đường tròn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, đường thẳng OH cắt cạnh AB tại M và cắt cạnh AC tại N

1) Tính \widehat{BAC}

2) Chứng minh năm điểm B, H, I, O, C cùng nằm trên một đường tròn

3) Chứng minh $BM + CN = MN$

Câu 5. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm là x_1, x_2 thỏa mãn $ax_1 + bx_2 + c = 0$. Tính giá trị biểu thức:

$$M = a^2c + ac^2 + b^3 - 3abc$$

Giải

Câu 1.

$$1) \text{ Ta có: } A = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{\sqrt{x-1}}, x+1 = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$B = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow P = A : B = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{2}{x}, x$$

$$2) P = 3 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{x} = 3 \Leftrightarrow 3x + \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{4} \text{ (thỏa điều kiện bài toán)}$$

Câu 2.

$$\begin{cases} x(y-2) = (x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7) = (2x-7)(y+3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy - 2x = xy + 2y - 4x - 8 \\ 2xy - 6y + 7x - 21 = 2xy - 7y + 6x - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(-2; 2)$

Câu 3.

- Đồ thị hàm số $y = mx + m^2 + \frac{9}{4}$ đi qua điểm $(-1; 2)$, nên ta có:

$$2 = -m + m^2 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

- Đồ thị hàm số $y = (4m^2 + 1)x^2$ đi qua điểm $(-1; 2)$, nên ta có:

$$2 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì đồ thị hai hàm số trên đi qua điểm $(-1; 2)$

Với $m = \frac{1}{2}$ thì hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là

$$\text{nghiệm của phương trình: } \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \left(4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{5}{4}$$

Từ đó ta tìm được giao điểm thứ hai của đồ thị hai hàm số trên là:

$$\left(\frac{5}{4}; \frac{25}{8}\right)$$

Câu 4.

1) Tứ giác AEIF nội tiếp, suy ra

$$\widehat{BAC} + \widehat{EIF} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BIC} = 180^\circ \quad (\widehat{BIC} = \widehat{EIF} \text{ đối đỉnh})$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

2) Dễ thấy $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$;

$$\widehat{BIC} = \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{BIC} = \widehat{BHC} = 120^\circ$$

Suy ra 5 điểm B, H, I, O, C cùng thuộc một đường tròn

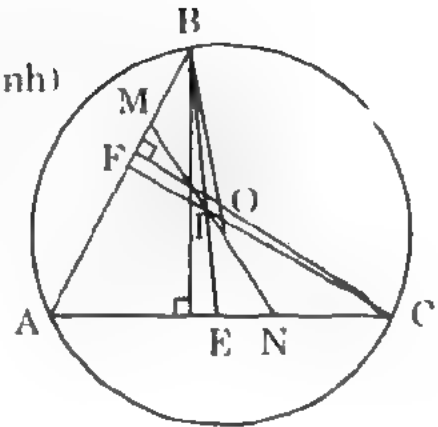
3) Ta có: $\triangle BOC$ cân tại O, $\widehat{BOC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BCO} = \widehat{CBO} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BCO} = 30^\circ; \widehat{CHO} = \widehat{CBO} = 30^\circ \quad (\text{vì tứ giác BHOC nội tiếp})$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{ABH} = \widehat{ACH} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 30^\circ$$

Suy ra $\triangle MBH$ cân tại M, $\triangle ANH$ cân tại N

$$\Rightarrow MB = MH, NC = NH \Rightarrow MB + NC = MN$$



Câu 5. Áp dụng định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{b}{a} x_2 + \frac{c}{a} = x_1 - x_2 (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2^2 \Rightarrow x_2 + x_2^2 = -\frac{b}{a}; \quad x_2^3 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Do đó: } \frac{M}{a^3} = \frac{c}{a} + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}$$

$$= x_2^3 + x_2^6 - (x_2 + x_2^2)^3 + 3(x_2 + x_2^2)x_2^3 = 0$$

Vậy $M = 0$

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x^2 + 1x + 4}{x^2 - 16} \left(x^2 - 8x + 16 \right)$

với $x = 8$

Câu 2. Cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 2m - 1$ và $x_1 x_2 = 3 - 0$

- Giải phương trình (1) với $m = 0$
- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với m
- Tìm một hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m
- Xác định giá trị của m sao cho phương trình có hai nghiệm bằng nhau và giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

Câu 3 Một canô xuôi dòng 48km rồi ngược dòng 22km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lớn hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc xuôi dòng lớn hơn vận tốc ngược dòng là 5km/h. Tính vận tốc canô lúc ngược dòng

Câu 4 Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ thì

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

Câu 5. Cho đường tròn tâm O đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn O' đường kính BC. Gọi M là trung điểm của AB, từ M kẻ dây cung DE vuông góc với AB; DE cắt đường tròn tâm O ở I

- Chứng minh tứ giác DMBI nội tiếp được trong một đường tròn
- Chứng minh $BI \perp AD$
- Chứng minh ba điểm I, B, E thẳng hàng

Câu 6. Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 120° . Gọi M là một điểm trên cạnh AB. Cắt đường thẳng DM và BC cắt nhau ở N

- Chứng minh hai tam giác AMD và CDN đồng dạng, từ đó suy ra hệ thức: $AC^2 = AM \cdot CN$
- Hai đường thẳng CN và AN cắt nhau ở E. Chứng minh tứ giác AEBD nội tiếp được trong một đường tròn
- Khi hình thoi ABCD có định, M chuyển động trên cạnh AB. Chứng minh rằng điểm E chuyển động trên một cung tròn cố định

Giải

Câu 1.

$$A = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x^2 - 16} (x^2 - 8x + 16) = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{(x-4)(x+4)} (x-4)^2 = \frac{|x+2|(x-4)}{x+4}$$

$$\text{Với } x = 8 \Rightarrow A = \frac{10}{3}$$

Câu 2.

$$x^2 - 2(m-1)x + m - 3 \quad (1)$$

a) Với $m = 0$, (1) trở thành: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$

b) (1) có $\Delta' = (m-1)^2 - (m-3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với

mọi m nên (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt

c) Áp dụng định lí Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m-3 \end{cases} \Rightarrow m = x_1 x_2 + 3$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2(x_1 x_2 + 3 - 1) \Rightarrow x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 4 \quad (*)$$

(*) chính là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

d) $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 3.

Gọi x (km/h) là vận tốc của canô khi đi ngược dòng, thì $x + 5$ (km/h) là vận tốc của canô khi xuôi dòng

Theo đề bài ta có phương trình:
$$\frac{48}{x+5} - \frac{22}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 110 = 0$$

Giải phương trình trên ta được: $x = 10; x = 11$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy vận tốc của canô khi ngược dòng là 10km/h hoặc 11 km/h

Câu 4.

Ta có:
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$

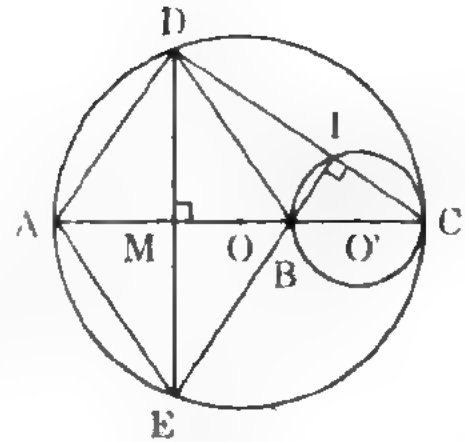
$$\Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

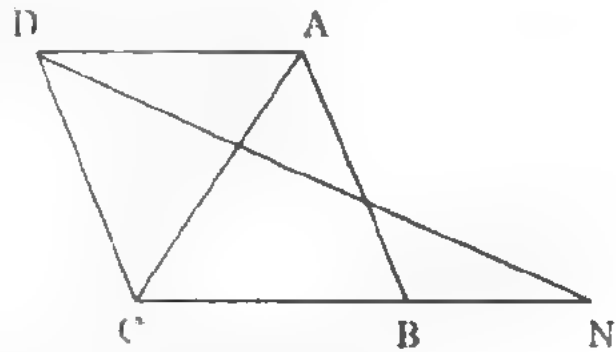
Câu 5

- a) Dễ thấy $\widehat{DMB} = \widehat{DIB} = 90^\circ$,
do đó $DMBI$ là tứ giác nội tiếp đường
tròn đường kính BD
- b) Mặt khác $\widehat{ADC} = \widehat{BIC} = 90^\circ$,
Suy ra $BI \parallel AD$ (cùng vuông góc với CD)
- c) Từ giả thiết ta có M là trung điểm của
 AB và DE , suy ra:
 $ABDE$ là hình bình hành
 $\Rightarrow AD \parallel BE \Rightarrow I, B, E$ thẳng hàng (vì theo câu b) thì $AD \parallel BI$)



Câu 6

- a) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CDN$ có
 $\widehat{ADM} = \widehat{MNC}$ (so le trong);
 $\widehat{ADM} = \widehat{MNC} = 120^\circ$ suy ra
 $\triangle AMD \sim \triangle CDN$ (g - g)
Do đó: $CD \cdot AD = AM \cdot CN$
Mặt khác, dễ thấy $\triangle ADC$ là
tam giác đều nên: $AC = AD = CD \Rightarrow AC^2 = AM \cdot CN$
- b) Ta cũng có $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60^\circ$
Mặt khác $AC^2 = AM \cdot CN$ nên hai tam giác MAC và ACN đồng dạng
theo trường hợp một cặp góc bằng nhau có hai cạnh bên tương ứng
tỉ lệ, suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{ANC}$
 $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ANC} + \widehat{ECN} = \widehat{ACM} + \widehat{ECN}$
 $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ tứ giác $AECB$ nội tiếp
- c) Từ câu b) suy ra E thuộc cung nhỏ AB của đường tròn ngoại tiếp tam
giác ABC



ĐỀ 26

Câu 1. Cho phương trình có ẩn số x : $x^2 - 3x - m^2 + m + 2 = 0$

- 1) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm so với mọi giá trị của m
- 2) Tìm các giá trị của m sao cho nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn điều kiện $x_1^3 + x_2^3 = 9$

Câu 2. Cho biểu thức: $P = \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} + \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Chứng minh rằng P có giá trị không đổi nếu $\frac{x}{y} = \frac{x+1}{y+5}$

Câu 3. Một ô tô đi quãng đường AB dài 60km trong một thời gian đã dự định ô tô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc lớn hơn dự định là 10km/h và đi nửa quãng đường sau với vận tốc kém hơn dự định là 6km/h. Biết ô tô đến B đúng dự định. Tính thời gian ô tô dự định đi quãng đường AB

Câu 4. Cho đường tròn (O) và dây cung BC với góc $BOC = 120^\circ$. Các tiếp tuyến vẽ tại B và C với đường tròn cắt nhau tại A . Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC (trừ B, C). Tiếp tuyến tại M với đường tròn (O) cắt AB tại E , cắt AC tại F

- a) Tính số đo góc EOF
- b) Chứng minh tam giác ABC đều. Tính chu vi tam giác AEF , biết bán kính đường tròn (O) là R
- c) Gọi I và K tương ứng là giao điểm của BC với OE và OF . Chứng minh tứ giác $OIFC$ nội tiếp và các đường thẳng OM, EK, FI cùng đi qua một điểm
- d) Chứng minh $\triangle OIK$ đồng dạng với $\triangle OFE$ và $EF = 2KI$

Câu 5. Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 1$

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$

Giải

Câu 1.

$$x^2 - 3x - m^2 + m + 2 = 0$$

- 1) $\Delta = 9 - 4(-m^2 + m + 2) = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2 \geq 0 \forall m$
 Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m

2) Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = m^2 + m + 2 \end{cases}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9$$

$$27 - 9(m^2 + m + 2) = 9$$

$$9m^2 - 9m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 1$$

Vậy với $m = 0; m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 2:

a) $P = \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} = \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$. Điều kiện: $xy > 0$ và $x \neq y$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} = \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{(x+y)(\sqrt{xy} - x + y)}{(y-x)\sqrt{xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{x+y}{y-x} \end{aligned}$$

b) Vì $\frac{x}{y} = \frac{x+1}{y+5}$ nên $y = 5x$. Do đó $P = \frac{x+y}{y-x} = \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$

Vậy P luôn có giá trị không đổi

Câu 3: Gọi vận tốc ô tô dự định đi quãng đường AB là: x (km/h) ($x > 0$)

Thời gian ô tô dự định đi quãng đường AB là: $\frac{60}{x}$ (h)

Vận tốc ô tô đi $\frac{1}{2}$ quãng đường đầu trong thực tế là: $x + 10$ (km/h)

Thời gian ô tô đi $\frac{1}{2}$ quãng đường đầu là: $\frac{60}{2} : (x + 10) = \frac{30}{x + 10}$ (h)

Vận tốc ô tô đi $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại trong thực tế là: $x - 6$ (km/h)

Thời gian ô tô đi $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại là: $\frac{60}{2} : (x - 6) = \frac{30}{x - 6}$ (h)

Theo đề bài ta có phương trình: $30 \left(\frac{1}{x + 10} + \frac{1}{x - 6} \right) = \frac{60}{x - 6}$

Giai phương trình trên và kết hợp điều kiện của ẩn ta được $x = 30$

Vậy thời gian ô tô dự định đi quãng đường AB là: $\frac{60}{30} = 2$ (h)

Câu 4:

a) Ta có OE, OF lần lượt là phân giác của \widehat{BOM} và \widehat{MOC} , do đó:

$$\widehat{EOF} = \frac{1}{2} (\widehat{BOM} + \widehat{MOC}) = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = 60^\circ$$

b) Ta có $AB = AC \rightarrow \triangle ABC$ cân tại A

$$\text{Mặt khác } \widehat{BAC} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 60^\circ$$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Chu vi $\triangle AEF = AE + EF + FA$

$$= (AE + EB) + (AF + FC)$$

$$= AB + AC = 2AB$$

$$\text{Mà } AB = OB \cdot \cotg \widehat{AOB}$$

$$= R \cdot \cotg 30^\circ = R\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy chu vi } \triangle AEF = 2R\sqrt{3}$$

c) $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{ACB} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IOF} \text{ (cùng bằng } 60^\circ)$$

Vậy tứ giác $OIFC$ nội tiếp đường tròn

$$\text{Do đó } \widehat{OIF} + \widehat{OCF} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{OCF} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{OIF} = 90^\circ \text{ hay } FI \perp OI, FI \perp OE$$

Tương tự ta chứng minh được $EK \perp OF$

Trong tam giác DEF có OM , EK và FI là ba đường cao nên chúng đồng quy

d) Tứ giác $EIKF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{OEF} = \widehat{OKI}$ (cùng bù với góc IKF)

$$\triangle OIK \sim \triangle OFE \text{ (g-g-g), ta có: } \frac{IK}{EF} = \frac{OK}{OE} \quad (1)$$

$$\text{Tam giác } BOC \text{ cân tại } O \text{ có } \widehat{BOC} = 120^\circ \text{ nên } \widehat{OBC} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OBK} = 30^\circ \Rightarrow \frac{OK}{OE} = \sin \widehat{OEK} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } \frac{IK}{EF} = \frac{1}{2} \text{ hay } EF = 2IK$$

Câu 5: Ta có: $S = (x + y + z) \cdot S = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \right)$

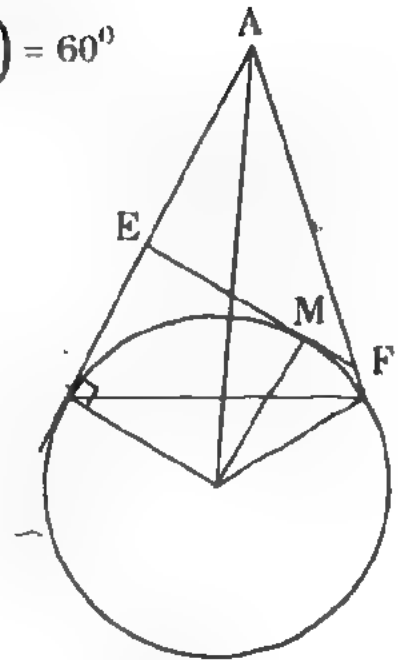
$$= 1 + 4 + 9 + \left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z} \right) + \left(\frac{9x}{z} + \frac{z}{x} \right)$$

$$(\text{do } x + y + z = 1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có.

$$\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 4; \quad \frac{4z}{y} + \frac{9y}{z} \geq 12; \quad \frac{9x}{z} + \frac{z}{x} \geq 6$$

$$\Rightarrow S \geq 1 + 4 + 9 + 4 + 12 + 6 = 36$$



$$\text{Đau "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ 4z^2 = 9y^2 \\ 9x^2 = z^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 36 đạt được khi và chỉ khi: $x = \frac{1}{6}$;

$$y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{2}$$

ĐỀ 27

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \sqrt{13 + 6\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}} - 3\sqrt{2}$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} - \frac{x + y}{y - x}$$

Câu 2: Cho Parabol (P) có phương trình: $y = x^2$ và $A(0; 1)$

a) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0; 1)$ có hệ số góc k

b) Tìm k để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại 2 điểm phân biệt.

Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn MN

Câu 3: Cho phương trình: $mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$

Tìm m để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2003$$

Câu 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của AO , đường thẳng Cx vuông góc với đường thẳng AB , Cx cắt nửa đường tròn trên tại I . K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C , K khác I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M . Tiếp tuyến với nửa đường tròn tâm O tại điểm M cắt Cx tại N , tia BM cắt Cx tại D

a) Chứng minh bốn điểm A, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh $\triangle MNK$ cân

c) Tính diện tích $\triangle ABD$ khi K là trung điểm của đoạn CI

d) Chứng minh rằng: khi K di động trên đoạn thẳng CI thì tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKD$ nằm trên một đường thẳng cố định

Câu 5: Cho hai số dương a, b và $a + b = 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Giải

Câu 1:

a) Ta có: $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2} - 1)^2} = 2\sqrt{2} - 1$

$$\begin{aligned}\text{Nên } \sqrt{13 + 6\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}} - 3\sqrt{2} &= \sqrt{13 + 6\sqrt{4 + 2\sqrt{2} - 1}} - 3\sqrt{2} \\ &= \sqrt{13 + 6\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} - 3\sqrt{2} \\ &= \sqrt{13 + 6(\sqrt{2} + 1)} - 3\sqrt{2} = \sqrt{(3\sqrt{2} + 1)^2} - 3\sqrt{2} = 1\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}B &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x + y}{x - y} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x + y}{x - y} \\ &= \frac{x + y + 2\sqrt{xy} - x - y + 2\sqrt{xy}}{2(x - y)} + \frac{x + y}{x - y} \\ &= \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} + \frac{x + y}{x - y} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\end{aligned}$$

Câu 2:

a) Gọi phương trình của đường thẳng (d) là: $y = kx + b$

(d) đi qua $A(0; 1)$ nên: $1 = k \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$

Vậy (d) có phương trình: $y = kx + 1$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \quad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = k^2 + 4 > 0 \forall k$

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\forall k$

Gọi x_M, x_N là hai nghiệm phân biệt của (*) khi đó ta có $M(x_M, y_M)$

$N(x_N, y_N)$. Vì I là trung điểm của MN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{(kx_M + 1) + (kx_N + 1)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{k}{2} \\ y_I = k \cdot \frac{x_M + x_N}{2} + 1 = \frac{k^2}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I\left(\frac{k}{2}; \frac{k^2}{2} + 1\right)$$

Câu 3:

$$mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0 \quad (*)$$

(*) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (2m - 1)^2 - 4m(m - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1 - 2m}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m - 2}{m} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2003 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2003$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 - 2m}{m} \right)^2 - 2 \frac{m - 2}{m} = 2003 \Leftrightarrow 2001m^2 - 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{2001}}$$

Vì $m > -\frac{1}{4}$, nên chọn $m = \frac{1}{\sqrt{2001}}$

Câu 4:

a) Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^\circ$

Do đó tứ giác ACMD nội tiếp đường tròn đường kính AD, hay bốn điểm A, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn

b) Ta có: $\widehat{BMK} + \widehat{BCK} = 180^\circ$

Do đó tứ giác BMKC nội tiếp. Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{MKN}$ (do cùng bù với \widehat{MKC})

Mặt khác ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{NMA}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo \widehat{AM})

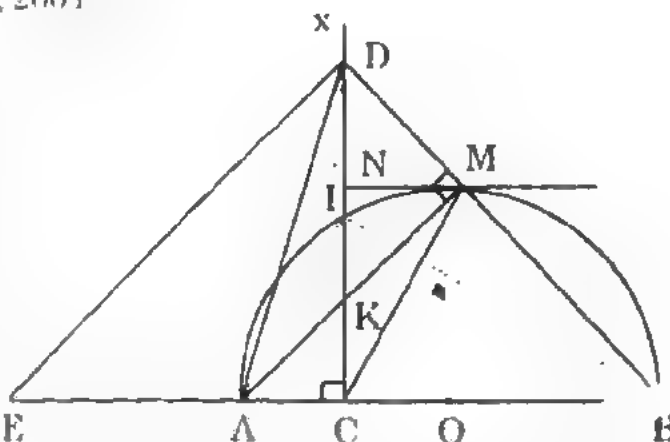
Suy ra $\widehat{MKN} = \widehat{NMK}$. Do đó $\triangle MKN$ cân tại N

c) Ta có: $\widehat{NMD} = \widehat{MDN}$ (vì cùng phụ với hai góc $\widehat{NMK} = \widehat{NKM}$)

Do đó tam giác MND cân tại N, suy ra $NM = ND$. Mà $NM = NK$, do đó $ND = NK$

Tam giác AIB cân tại I, có $IC \perp AB$ nên $IC^2 = AC \cdot AB = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$

Suy ra $IC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Khi K là trung điểm của IC, ta có $KC = \frac{1}{2} IC = \frac{R\sqrt{3}}{4}$



$$\operatorname{tg} \widehat{KAC} = \frac{KC}{AC} = \frac{R\sqrt{3}}{4} : \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mà $\widehat{KAC} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với \widehat{ABD}), do đó $\operatorname{tg} \widehat{CDB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Suy ra } \frac{CB}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CD = \frac{2CB}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}$$

$$Dt(\triangle ABD) = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R\sqrt{3} = R^2 \sqrt{3}$$

d) Gọi E là điểm đối xứng của B qua C, suy ra E cố định, $\widehat{DEB} = \widehat{MKD}$ (cùng bù với \widehat{MKC}), suy ra $\widehat{DEA} = \widehat{MKD}$

Do $\widehat{MKD} + \widehat{DKA} = 180^\circ$, nên $\widehat{DEA} + \widehat{AKD} = 180^\circ$

Vậy tứ giác AKDE là tứ giác nội tiếp

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKD$, suy ra J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AKDE nên $JA = JE$. Vậy J thuộc đường trung trực của đoạn AE cố định

Câu 5: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \quad (2)$$

Vì các vế của (1) và (2) đều dương nên ta có:

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\Leftrightarrow 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \quad (\text{do } a + b = 5) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{5}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a + b = 5 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{5}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{5}$ đạt được khi $a = b = \frac{5}{2}$

ĐỀ 28

Câu 1:

a) Rut gọn biểu thức: $P = \frac{5\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{1 - 2x}$

b) Chứng minh rằng: $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-3x} \leq 3$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x thuộc tập xác định

Câu 2: Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 3 = 0$

a) Hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm là $2x_1 - x_2$ và $2x_2 - x_1$

b) Hãy tính giá trị biểu thức $A = 2x_1 - x_2 + 2x_2 - x_1$

Câu 3: Giải phương trình

a) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x-1} + 8$ b) $x^2 - 13x + 36 = 0$

Câu 4: Cho hàm số $y = x^2$ (P) và $y = 2x - m^2 + 2m$ (D). Với những giá trị nào của m thì đường thẳng (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt?

Câu 5: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O), có các đường phân giác trong cắt nhau tại I. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn (O) tương ứng tại các điểm M, N, P

a) Chứng minh tam giác NIC cân tại N

b) Chứng minh rằng điểm I là trực tâm của tam giác MNP

c) Gọi E là giao điểm của MN và AC, F là giao điểm của PM và AB. Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng

d) Gọi K là trung điểm của BC và giả sử rằng BI vuông góc với IK, $BI = 2IK$. Hãy tính góc A của tam giác ABC

Giải

Câu 1:

a) $P = \frac{5\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{1 - 2x} = \frac{5\sqrt{(x-2)^2}}{2(2-x)} = \frac{5|x-2|}{2(2-x)}$

Nếu $x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2 = -(2 - x)$

Do đó $P = \frac{-5(2-x)}{2(2-x)} = -\frac{5}{2}$

Nếu $x < 2$ thì $x - 2 < 0$ nên $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$

Do đó $P = \frac{5(2-x)}{2(2-x)} = \frac{5}{2}$

b) Ta chứng minh với mọi $a \geq 0, b \geq 0, c > 0$

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (1)$$

Ta có: $a + b + c < \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow (a + b + c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \quad (2)$$

(2) đúng, suy ra (1) đúng

Đặt $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{2x-3}$ và $c = \sqrt{5-3x}$, áp dụng (1) ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-3x} &< \sqrt{3\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + \left(\sqrt{5-3x}\right)^2\right]} \\ &\leq \sqrt{3(x+1+2x-3+5-3x)} = 3 \end{aligned}$$

Câu 2:

a) Áp dụng định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$

Xét: $(2x_1 - x_2) + (2x_2 - x_1) = x_1 + x_2 = 7$

$$\begin{aligned} (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1) &= 4x_1 x_2 - 2x_2^2 + x_1 x_2 - 2x_1^2 = -2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1 x_2 \\ &= -2(x_1 + x_2)^2 + 9x_1 x_2 = -2.49 + 27 = -71 \end{aligned}$$

Vậy phương trình bậc hai có 2 nghiệm $(2x_1 - x_2)$ và $(2x_2 - x_1)$ là:

$$x^2 - 7x - 71 \quad (*)$$

b) $A = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|$

Đặt $a = 2x_1 - x_2$, $b = 2x_2 - x_1$ thì a và b là các nghiệm của (*)

Do đó: $\begin{cases} a + b = 7 \\ ab = -71 \end{cases}$. Ta có $A = |a| + |b| \geq 0$, suy ra $A^2 = a^2 + b^2 + 2|ab|$

$$= (a + b)^2 - 2ab + 2|ab| = 49 \Rightarrow A = 7$$

Câu 3:

a) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}} \quad (1)$

Điều kiện $x \geq -1$; $x \geq -8$; $x \geq \sqrt{x+8}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{x - \sqrt{x+8}} + 1 \Leftrightarrow x+1 = x - \sqrt{x+8} + 2\sqrt{x - \sqrt{x+8}} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x - \sqrt{x+8}} = \sqrt{x+8} \Leftrightarrow 4(x - \sqrt{x+8}) = x+8$$

$$\Leftrightarrow 3x - 8 = 4\sqrt{x+8} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 48x + 64 = 16(x+8) \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$$

Thử lại thay $x = 8$ là nghiệm của (1)

b) $x^2 - 13x + 36 = 0$ (2)

Đặt $x^2 = t$, (2) trở thành: $t - 13t + 36 = 0$ ($t > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 9 \end{cases}$

Với $t = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; với $t = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Câu 4:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $-x^2 = 2x - m^2 + 2m$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 + 2m = 0$ (1)

(D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 + m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Câu 5:

a) Ta có $\widehat{ACN} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn \widehat{AN})

$\widehat{ICN} = \widehat{ICA} + \widehat{ACN}$

$\widehat{ICA} + \widehat{ABN} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$

$\widehat{NIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$

Suy ra $\widehat{NIC} = \widehat{NCI}$

Vậy $\triangle NIC$ cân tại N

b) $\triangle NIC$ cân tại N, có NM là phân giác của góc INC nên MN là đường trung trực của IC, suy ra $PC = MN$

Tương tự ta có: $MA = NP$, $NB = PM$ 3 đường cao MA, NB và PC của $\triangle MNP$ cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác đó

c) Theo câu b) MN là đường trung trực của IC nên $EI = EC$

Tam giác EIC cân tại E suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{ECI}$. Mặt khác $\widehat{ECI} = \widehat{ICB}$

Suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{ICB} \Rightarrow IE \parallel BC$. Tương tự $IF \parallel BC$

Qua điểm I ngoài đường thẳng BC có IE và IF cùng song song với BC nên IE trùng IF hay ba điểm E, I, F thẳng hàng

d) Gọi Q là trung điểm của IC thì $KQ \parallel IB$ mà $IB \perp IK \Rightarrow KQ \perp IK$

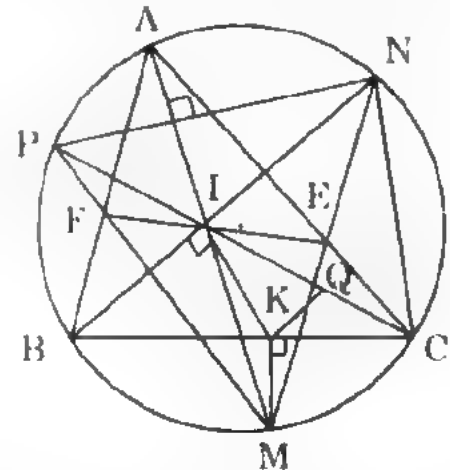
KQ là đường trung bình của $\triangle BIC$ nên $KQ = \frac{1}{2}BI$, mà $IK = \frac{1}{2}BI$

$\Rightarrow KI \parallel KQ$. Tam giác KIQ vuông cân tại K $\Rightarrow \widehat{KIQ} = 45^\circ$

Mặt khác ta có $IK \parallel MP$ (vì cùng vuông góc với BI)

nên $\widehat{MPC} = \widehat{KIC} = 45^\circ$

Mà $\widehat{MPC} = \widehat{MAC}$, do đó $\widehat{MAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$



ĐỀ 29

Câu 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} = 2x - 1$

b) $(x^2 - 4x)^2 + 3(x^2 - 4x) - 4 = 0$

Câu 2:

Cho biểu thức: $M = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa

b) Rút gọn M

Câu 3: Cho phương trình: $x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2} \quad (1)$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất, tính nghiệm đó với $m = \sqrt{2} + 1$

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ là nghiệm

Câu 4: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA = 2R$, tưởng kinh BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai I . Đường thẳng AB, AC lại cắt $(O; R)$ lần lượt tại D, E với $D \neq B; C \neq E$. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K

a) Chứng minh rằng: $OI.OA = OB.OC$ và $AK.AI = AE.AC$

b) Tính độ dài đoạn OI và đoạn AK theo R

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định F ($F \neq A$) khi BC quay quanh O

Câu 5: Cho biểu thức: $M = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Tìm cặp số $(x; y)$ để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó

Giải

Câu 1:

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} = 2x - 1$. Điều kiện: $x \geq 0$

Đặt $a = \sqrt{3x}$, $b = \sqrt{x+1}$, $a, b \geq 0$

Ta có: $b - a = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0$

Mà $a + b + 1 > 0 \Rightarrow a = b$ Do đó $\sqrt{3x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3x = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{2}$

b) $(x^2 - 4x)^2 + 3(x^2 - 4x) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 - 1 + 3[(x^2 - 4x) - 1] = 0$$

$$\therefore (x^2 - 4x - 1) + (x^2 - 4x + 1) + 3 = 0$$

$$\therefore (x^2 - 4x - 1)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 1 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 2 + \sqrt{5}$; $x = 2$; $x = 2 - \sqrt{5}$

Câu 2:

a) M có nghĩa khi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ 2x + \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ (\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1) \neq 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } M &= \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{(x + \sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} = \frac{(2\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x})}{(x + \sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

Câu 3:

$$x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\text{a) } (1) \Leftrightarrow (1 + m\sqrt{2})x = m^2 + 3 - \sqrt{2} \quad (2)$$

(2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $1 + m\sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Khi đó } x = \frac{m^2 + 3 - \sqrt{2}}{1 + m\sqrt{2}} > 0 \Leftrightarrow m - \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x = \frac{6 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{16 - 3\sqrt{2}}{7}$$

b) Phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ là nghiệm nên:

$$5\sqrt{2} - 6 - m^2 + 3 - \sqrt{2} = m\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 6)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + (6\sqrt{2} - 10)m + 9 - 6\sqrt{2} = 0$$

Giải phương trình này ta được $m_1 = 1$; $m_2 = 9 - 6\sqrt{2}$

Vậy có 2 giá trị $m = 1$, $m = 9 - 6\sqrt{2}$ thỏa điều kiện bài toán

Câu 4:

ĐỀ 30

Câu 1: Cho biểu thức

$$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}^3 + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y}^3}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

với $x > 0, y > 0$

a) Rút gọn A

b) Biết $xy = 16$. Tính các giá trị x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) đi qua $I(0; -1)$ có hệ số góc k

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh với mọi giá trị k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Gọi hoành độ của A và B là x_1 và x_2 . Chứng minh $|x_1 - x_2| > 2$

c) Chứng minh tam giác OAB vuông

Câu 3: Giải các phương trình

a) $2x^2 - 5x + 1 = 3x - 1$ b) $x^2 + 2 = \sqrt{2 - x}$

Câu 4: Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z + xy + yz + zx = 6. \text{ Chứng minh rằng } x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$$

Câu 5: Cho đường tròn (O; R) và dây MN cố định. Gọi P là điểm chính giữa cung nhỏ MN. Lấy điểm I bất kỳ trên cung nhỏ PN rồi vẽ tia Mx vuông góc với PI tại K và cắt NI kéo dài tại E

a) Chứng minh $\widehat{PIE} = \widehat{PMN}$ và IP là tia phân giác góc MIE

b) Chứng minh P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE và góc MNE không phụ thuộc vào vị trí điểm I

c) Tia EP cắt MN tại F và cắt đường tròn (O) tại G, chứng minh rằng MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFG

d) Chứng minh tích PE.PG không đổi khi I chạy trên cung nhỏ PN. Tính tích này theo R và góc \widehat{PMN} bằng α

Giải

Câu 1:

$$a) A = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x + y}{xy} \right) \left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x\sqrt{xy} + y) + \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x + y)} \right]$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{xy} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

b) Ta có: $\left(\sqrt{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{y}} \right)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}$$

Do đó $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \geq 2 \frac{\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} = 1$ (do $xy = 16$)

Vậy A có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4$

Câu 2:

a) Phương trình đường thẳng (d): $y = kx - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 + kx - 1 = 0$ (1)

Vì (1) có $\Delta = k^2 + 4 > 0 \forall k$ nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Ta có: $x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \left| x_1 + \frac{1}{x_2} \right|$

Nhận xét rằng x_1 và $\frac{1}{x_1}$ cùng dấu nên $\left| x_1 + \frac{1}{x_1} \right| = |x_1| + \frac{1}{|x_1|} \geq 2$

Vậy $|x_1 - x_2| \geq 2$

c) Phương trình đường thẳng OA là: $y = -x_1x$

Phương trình đường thẳng OB là: $y = -x_2x$

Vì $(-x_1)(-x_2) = -1$ nên tam giác OAB vuông tại O

Câu 3:

a) $|2x^2 - 5x + 1| = |3x - 1| \Leftrightarrow (2x^2 - 5x + 1)^2 - (3x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 2x)(2x^2 - 8x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm: $x = 0$; $x = 1$; $x = 2 + \sqrt{3}$;
 $x = 2 - \sqrt{3}$

Câu 4:

Ta có: $x^2 + 1 \geq 2x$; $y^2 + 1 \geq 2y$; $z^2 + 1 \geq 2z$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2(x + y + z + xy + yz + zx)$$

Đau “=” xấp xỉ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Câu 5:

a) Do từ giác PINM nối tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{PIE} = \widehat{PMN}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{PIM} = \widehat{PMN}$ (do $PM \perp PN$) (2).

Từ (1) và (2) có: $\widehat{P\hat{E}E} = \widehat{P\hat{M}M}$ hay $\widehat{EP\hat{M}}$ là tia phân giác của góc \widehat{MEP} .

b) AMIE cân (đường cao IK vừa là phân giác, do đó IK là trung trực của ME)

$$\therefore PM = PE \quad (3)$$

$$\text{Do } \widehat{\text{PM}} = \widehat{\text{PN}} \text{ non PM} = \text{PN} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $PM = PE = PN$, do đó P là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNE$. Đường tròn này cố định (vì P cố định và bán kính PM không đổi), do đó cung MEN có đo lớn không đổi và không phụ thuộc vào vị trí của điểm I trên cung PN .

c) Ta có: $\widehat{\text{sd PMN}} = \frac{1}{2} \widehat{\text{sd PN}}$; $\widehat{\text{sd MGP}} = \frac{1}{2} \widehat{\text{sd PM}}$; $\widehat{\text{PM}} = \widehat{\text{PN}}$

Do đó: $\widehat{PMN} = \widehat{MGP}$ Suy ra MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFG

d) Xét ΔPMF và ΔPGM . Có \widehat{A} chung, $\widehat{PMF} = \widehat{MPG}$

Do đó $\Delta PMF \sim \Delta PGM \Rightarrow \frac{PM}{PG} = \frac{PF}{PM} \Rightarrow PF \cdot PG = PM^2$ không đổi.

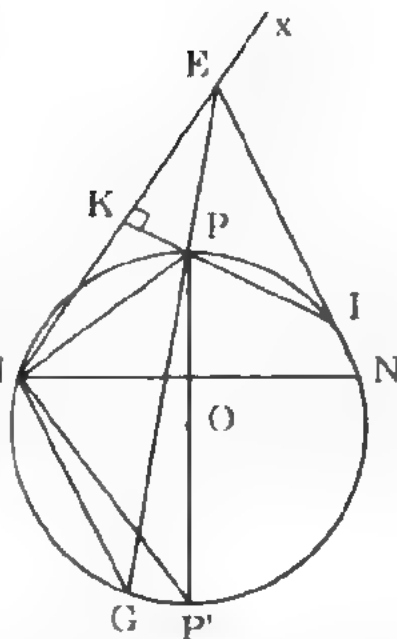
chạy trên cung nhỏ PN

Ve đường kính PI' rồi xét tam giác PMP' vuông tại M ta có $\widehat{MP'P} = \widehat{MGP}$

Do cùng chắn MP), $\widehat{PMN} = \alpha = \widehat{MGP}$ (chứng minh trên), do đó

$$\widehat{MP'P} = \alpha. \text{ Vây } PM = PP' \sin \alpha$$

nên ta có $PF.PG = MP^2 = (2R)^2 \sin^2 \alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha$



ĐỀ 31

Câu 1:

a) Tính $A = \left(\sqrt{11 + 2\sqrt{30}} - \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \right) (\sqrt{5} - \sqrt{2})$

b) Thu gọn biểu thức: $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$

Câu 2: Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $\sqrt{5-x} = 2x-7$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Câu 3: Cho phương trình: $x^2 - 2\sqrt{m^2 - 2m}x + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (1)$

a) Định m để phương trình (1) có nghiệm

b) Định m để tổng bình phương hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 4:

a) Chứng minh rằng biểu thức: $A = a^2 + b^2 - 2ab + a - b + 1$ luôn dương với mọi a và b

b) Cho ba số dương x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Câu 5: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $AC = b$, $AB = c$ (với $b > c$).

Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC

a) Chứng minh các tứ giác AIEJ và CMJE nội tiếp

b) Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK

c) Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c

d) Tính $IH + JK$ theo b, c

Giải

Câu 1:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\sqrt{11 + 2\sqrt{30}} - \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \right) (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \left(\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} \right) (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{2}) (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 3 \end{aligned}$$

Vậy $A = 3$

$$\begin{aligned}
b) B &= \sqrt{6} - 2\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - 8 - 2 \\
&= \sqrt{6} - 2\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{(1+2)} - 10 = \sqrt{6} - 2\sqrt{2} + \sqrt{12} + 2 - \sqrt{2} \\
&= \sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} = \sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 4 \\
&= \sqrt{6} - 2(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1 \\
\text{Vậy } B &= \sqrt{3} - 1
\end{aligned}$$

Câu 2:

$$\begin{aligned}
a) \sqrt{5-x} - 2\sqrt{x-7} &= 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 \geq 0 \\ 5-x = (2\sqrt{x-7})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 7 \\ 4x^2 - 27x + 44 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ (x-4)(4x-11) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{2} \\ \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{11}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4
\end{aligned}$$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình đã cho

$$b) \begin{cases} 2x - 3y - 1 = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 6 & (1) \\ 3x + 2y = 7 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $x = \frac{6-3y}{2}$ thế vào (2) ta được $\frac{3}{2}(6-3y) + 2y = 7$

$$\Leftrightarrow 18 - 5y = 14 \Leftrightarrow y = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{6-3y}{2} = \frac{9}{5}$$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ của là: $\left(\frac{9}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Câu 3:

$$x^2 - 2\sqrt{m^2 - 2m}x + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (1)$$

a) Điều kiện: $m^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m < 0$ hay $m \geq 2$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta = m^2 - 2m - m^2 + 3m - 2 > 0$
 $\Leftrightarrow m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$. So với điều kiện ta nhận $m \geq 2$.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) ta có:

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m^2 - 2m) - 2(m^2 - 3m + 2) \\
&= 2m^2 - 2m - 4 = 2\left(m^2 - m + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{2} = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Vì } m \geq 2 \Rightarrow m - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ bằng 0 đạt được khi và chỉ khi $m = 2$

Câu 4:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= a^2 + b^2 - 2ab + a - b + 1 = (a - b)^2 + (a - b) + 1 \\ &= (a - b)^2 + 2(a - b) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left[(a - b) + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \left[(a - b) + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$\text{b) Ta chứng minh: } \sqrt{x + yz} \geq x + \sqrt{yz} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x + yz \geq x^2 + 2x\sqrt{yz} + yz \Leftrightarrow 1 \geq x + 2\sqrt{yz}$$

$$\Leftrightarrow x + y + z \geq x + 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow y + z \geq 2\sqrt{yz}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \geq 0. \text{ Do đó (1) đúng}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \sqrt{y + zx} \geq y + \sqrt{zx} \quad (2)$$

$$\sqrt{z + xy} \geq z + \sqrt{xy} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3), suy ra: } \sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{1}{3}$$

Câu 5:

$$\text{a) Ta có: } \widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^\circ$$

Suy ra tứ giác AIEJ nội tiếp đường tròn đường kính AE.

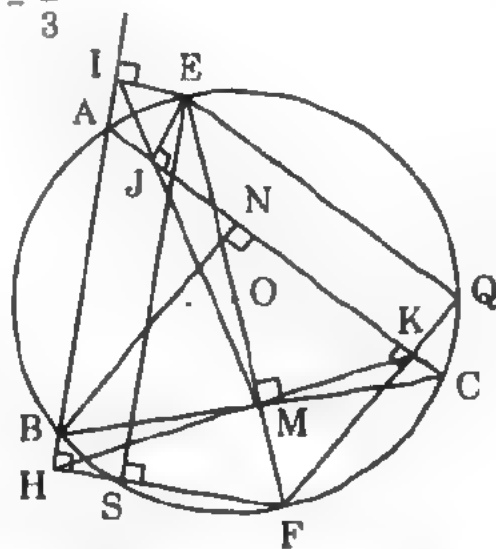
$$\text{Lại có: } \widehat{CME} = \widehat{CJE} = 90^\circ$$

Suy ra tứ giác CMJE nội tiếp đường tròn đường kính CE.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \widehat{IEM} &= \widehat{AEC} \text{ (cùng bù } \widehat{ABC}) \\ &\Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{CEM} \end{aligned}$$

Mặt khác: $\widehat{AEI} = \widehat{AJI}$ (cùng chắn \widehat{AI}); $\widehat{CEM} = \widehat{CJM}$ (cùng chắn \widehat{CM})
 $\Rightarrow \widehat{CJM} = \widehat{AJI}$. Vì I, M nằm về hai phía của đường thẳng AC nên I, J, M thẳng hàng. Tương tự, ta cũng chứng minh được H, K, M thẳng hàng

Do tứ giác CFMK nội tiếp nên $\widehat{CFK} = \widehat{CMK}$



Do tứ giác CMJE nội tiếp nên $\widehat{JME} = \widehat{JCE}$

Mặt khác $\widehat{ECF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CEK} = \widehat{JCE}$ (vì cùng bằng $90^\circ - \widehat{ACF}$)

Từ đó ta có: $\widehat{CMK} = \widehat{JME} = \widehat{JMK} = \widehat{EMC} = 90^\circ$ hay $IJ \perp HK$

c) Kẻ BN vuông góc AC, vì $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABN} = 30^\circ$

$$AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$$

$$\text{Ta có: } BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3}{4}c^2 + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$\therefore BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$. Tam giác đều BCE có:

$$R = CE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3.2} = \frac{1}{3}\sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}$$

d) Gọi S là giao điểm của SH với đường tròn O

Ta có tứ giác HSIE là hình chữ nhật nên $IH = ES$

Mặt khác $AB \parallel ES$ nên $\widehat{AB} = \widehat{BS}$ mà $\widehat{BE} = \widehat{CE} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{AEC}$

Vậy $ES = AC = b \Rightarrow IH = b$

Gọi Q là giao điểm của FK với đường tròn (O). Ta có tứ giác EJKQ là hình chữ nhật nên $JK = EQ$

Mặt khác $EQ \parallel AC$ nên $\widehat{AE} = \widehat{CQ}$ mà $\widehat{BE} = \widehat{CE} \Rightarrow \widehat{EQ} = \widehat{AB}$

Vậy $EQ = AB = c \Rightarrow JK = b$. Do đó $IH + JK = b + c$

ĐỀ 32

Câu 1: Tính:

$$1) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}; \quad 2) \left(\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right)^2$$

Câu 2:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = 2x^2$

b) Trên đồ thị (P) ta lấy hai điểm A, B có hoành độ tương ứng là 1 và 2. Xác định các giá trị của m và n để đường thẳng $y = mx + n$ tiếp xúc với (P) và song song với AB

Câu 3: Trong một cuộc đua, ba tay đua mô tô đã khởi hành cùng một lúc. Mỗi giờ người thứ hai chạy chậm hơn người thứ nhất 15km và

nhau hơn người thứ ba 3km. Người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút và sớm hơn người thứ ba 3 phút. Tính vận tốc các tay đua

Câu 4: Một điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Gọi H, I lần lượt là hai điểm chính giữa các cung AM, MB , gọi Q là trung điểm của dây MB và K là giao điểm của AM, HI

- 1) Tính độ lớn góc HKM
- 2) Vẽ $IP \perp AM$ chứng minh IP tiếp xúc với đường tròn tâm O
- 3) Dựng hình bình hành $APQR$. Tìm tập hợp các điểm R khi M di động trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB

Giải

Câu 1:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} &= \frac{(x - \sqrt{x^2 - y^2}) + (x + \sqrt{x^2 - y^2})}{(x + \sqrt{x^2 - y^2})(x - \sqrt{x^2 - y^2})} \\ &= \frac{2x}{x^2 - (x^2 - y^2)} = \frac{2x}{y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right)^2 &= \left[\frac{(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right] \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right]^2 \\ &= (\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2} + \sqrt{xy}) \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \text{ khi } x > 0, \end{aligned}$$

$$y > 0$$

Câu 2:

a) Vẽ đồ thị $(P): y = 2x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

b) Hệ số góc của đường thẳng qua A và B là $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 2}{2 - 1} = 6$

Vì $y = mx + n$ song song với AB nên $m = 6$

Để đường thẳng $y = 6x + n$ tiếp xúc với (P) thì phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 = 6x + n \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - n = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 2n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{9}{2}$$

Tóm lại đường thẳng $y = mx + n$ tiếp xúc với (P) và song song với AB thì $m = 6$ và $n = -\frac{9}{2}$

Câu 3: Gọi x (km/h) là vận tốc người thứ hai, thì vận tốc người thứ nhất là $(x + 15)$ (km/h) và vận tốc người thứ ba là $(x - 3)$ (km/h). Gọi y (km/h) là chiều dài quãng đường

Điều kiện : $x > 3, y > 0$

Người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút (tức là $\frac{1}{5}$ giờ).

Theo đề bài ta có $\frac{y}{x} - \frac{y}{x + 15} = \frac{1}{5}$ (1)

Người thứ hai đến đích sớm hơn người thứ ba 3 phút (tức là $\frac{1}{20}$ giờ)

Theo đề bài ta có: $\frac{y}{x - 3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\frac{y}{x} - \frac{y}{x + 15} = \frac{1}{5}$ và $\frac{y}{x - 3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}$ (3)

Do $y > 0$ nên (3) trở thành

$$(x + 15)(x - 3) - x(x - 3) = 4x(x + 15) + 4(x + 15)(x - 3) = 0$$

Giải phương trình ta có $x = 75$. Thay $x = 75$ vào (1) ta có $y = 90$

Vậy vận tốc các tay đua là 90km/h, 75km/h, 72km/h

1) Tính độ lớn góc HKM

Vì $\widehat{HA} = \widehat{HM}$ và $\widehat{IM} = \widehat{IB}$

nên $\widehat{HA} + \widehat{MI} = 90^\circ$

nên $\widehat{HKA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{HKM} = 135^\circ$

2) Vì $\widehat{IM} = \widehat{IB}$ nên đường kính IO vuông góc với MB tại chính trung điểm Q của MB. Tứ giác PMQI có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật

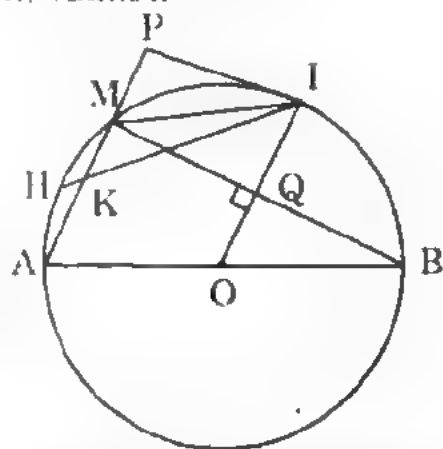
Suy ra $\widehat{OIP} = 1$ vuông hay $OI \perp PI$ tức là PI là tiếp tuyến của đường tròn tâm O

3) Vì PMQI là hình chữ nhật nên $\widehat{MPQ} = \widehat{MIQ}$ (1)

Và APQP là hình bình hành nên $\widehat{MPQ} + \widehat{PAR} = 2$ vuông (2)

Từ (1), (2) suy ra: $\widehat{MPQ} + \widehat{PAR} = 2v$, do đó tứ giác AMIR nội tiếp được trong đường tròn

Qua 3 điểm không thẳng hàng A, M, I chỉ dựng được một đường tròn duy nhất, biết A, M, I nằm trên nửa đường tròn đường kính AB, nên R cũng phải nằm trên đường tròn đường kính AB này (R thuộc nửa đường tròn không chứa M)



Đảo lại nếu lấy R' bất kỳ thuộc nửa đường tròn đường kính AB không chứa M . Dụng đường kính $R'OI'$
 Từ B dựng $BM' \perp OI'$, BM' cắt OI' tại Q . Hạ $I'P' \perp AM'$
 Dễ dàng chứng minh được $AP'Q'P'$ là hình bình hành
 Vậy tập hợp điểm R khi M di động trên nửa đường tròn đường kính AB đã cho là nửa đường tròn đường kính AB không chứa điểm M

ĐỀ 33

Câu 1:

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{3\sqrt{a}-1} - \frac{1}{1+3\sqrt{a}} + \frac{8\sqrt{a}}{9a-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}+1} \right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm các giá trị của a để

$$A = \frac{6}{5}$$

Câu 2: Cho phương trình $2x^2 - 6x + m = 0$

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm dương

b) Với giá trị nào của m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$$

Câu 3: Dùng 6 giờ sáng một xe đạp xuất phát từ A để đến B và dùng 7 giờ sáng cùng ngày một người đi ô tô xuất phát từ B để đến A , 16 phút sau khi gặp nhau người đi ô tô về đến A và 1 giờ 40 phút sau khi gặp người đi xe đạp về đến B . Hỏi mỗi người đã đi hết quãng đường AB mất bao lâu? Biết vận tốc mỗi người không đổi trong suốt quãng đường

Câu 4: Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O , bán kính R , CD là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho $CD = R\sqrt{2}$ (A, C, D, B theo thứ tự ấy trên nửa đường tròn và C, D không trùng với A, B) Hai tia AC và BD cắt nhau tại E

1) Tính số đo của góc COD

2) Tìm tập hợp các trung điểm của dây cung CD

3) Tính số đo của góc AEB và suy ra tập hợp các điểm E

4) Gọi F là giao điểm của CD và AB , K là giao điểm của phân giác của các góc AEB và AFC . Chứng minh góc EKF vuông

Giải

Câu 1:

a) Rút gọn

Điều kiện để A có nghĩa là $a \geq 0, 9a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{9}$

$$A = \left(\frac{(\sqrt{a} - 1)(3\sqrt{a} + 1)}{9a - 1} - \frac{(3\sqrt{a} - 1)}{9a - 1} + \frac{8\sqrt{a}}{9a - 1} \right) \cdot \left(\frac{3\sqrt{a} + 1 - 3\sqrt{a} + 2}{3\sqrt{a} + 1} \right)$$

$$A = \frac{a + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} - 1}$$

b) Tìm các giá trị của a để $A = \frac{6}{5}$

$$A = \frac{a + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} - 1} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 5a + 5\sqrt{a} - 18\sqrt{a} - 6 \Leftrightarrow 5a - 13\sqrt{a} + 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{a} = x \text{ thì (1) có dạng } 5x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Từ } \sqrt{a} = x \Rightarrow a = x^2. \text{ Do đó } a = x_1^2 = 2^2 = 4; a = x_2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Với $a = 4; a = \frac{9}{25}$ thỏa mãn điều kiện $a \geq 0, a \neq \frac{1}{9}$. Vậy với $a = 4$

hoặc $a = \frac{9}{25}$ thì $A = \frac{6}{5}$

Câu 2:

Phương trình $x^2 - 6x + m = 0$

a) Phương trình có 2 nghiệm dương khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{2} \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \text{ . Đáp số: } 0 < m < \frac{9}{2}$$

$$b) \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 - m}{\frac{m}{2}} = 3 \Leftrightarrow 18 - 2m = 3m \Leftrightarrow m = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

Câu 3:

Gọi C là vị trí hai người gặp nhau



Gọi x (h) là thời gian ô tô đi từ B đến C

$$\text{Quãng đường } AC = (x + 1) V_1 = \frac{4}{15} V_2 \quad (1)$$

$$\text{Quãng đường } BC = \frac{5}{3} V_1 = x \times V_2 \quad (2)$$

Chia (1) cho (2) về theo về ta có: $\frac{3(x + 1)}{5} = \frac{4}{15x}$

Giải phương trình ta có $x = \frac{1}{3}$

Thời gian ô tô đi quãng đường AB là $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15}$ (h)

Thời gian xe đạp đi quãng đường AB là $1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 3$ (h)

Câu 4:

- 1) Do độ dài $CD = R\sqrt{2}$ là cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R nên CD tương ứng $\widehat{CD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ$

- 2) Gọi M là trung điểm của CD, $\triangle COD$ vuông tại O, ta có $OM = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

- a) Phần thuận: $OM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ không đổi, và O cố định nên M di động

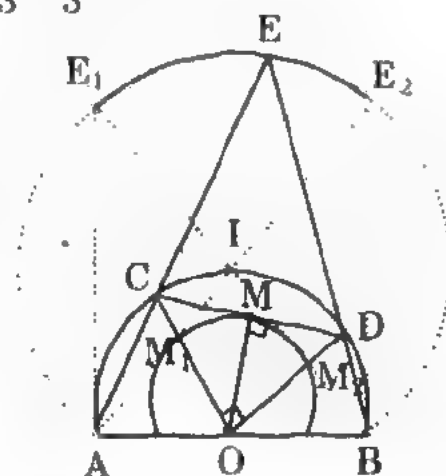
trên đường tròn tâm O bán kính $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

- b) Giới hạn:

- Khi C dần đến A; D dần đến I (I là điểm chính giữa của nửa đường tròn AB có chứa C, D) thì M đến M_1 (M_1 là trung điểm của IA)
- Khi D dần đến B, C dần đến I thì M dần đến M_2 (M_2 là trung điểm của IB)

Vậy M_1, M_2 là hai điểm giới hạn của M: M chỉ chạy trên cung nhỏ $\widehat{M_1 M_2}$ (như hình vẽ, loại 2 điểm M_1, M_2)

- c) Phần đảo: lấy điểm M bất kỳ trên cung $\widehat{M_1 M_2}$ ở phần giới hạn trên



- Vì dây cung $C'D'$ của đường tròn $(O; R)$ vuông góc với OM' tại M' ta có M' là trung điểm $C'D'$
- Định lý Pitago trong tam giác vuông $C'M'O$ ta có:

$$CM' = \sqrt{OC'^2 - OM'^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra $C'D' = 2CM' = R\sqrt{2}$

Vậy điểm M' thỏa mãn các điều kiện của đề bài (trung điểm của dây cung có độ dài $R\sqrt{2}$)

Kết luận: Tập hợp các điểm M là cung nhỏ M_1M_2 (loại M_1, M_2) thuộc đường tròn tâm O , bán kính $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

- 3) Ta có \widehat{AEB} là góc có đỉnh nằm ngoài $(O; R)$ nên

$$s\widehat{AEB} = \frac{1}{2} \left(s\widehat{AB} - s\widehat{CD} \right) = \frac{1}{2} (180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$$

- a) Phản thuận: góc $\widehat{AEB} = 45^\circ$ không đổi nên E di động trên cung chứa góc 45° vẽ qua A, B (xem hình vẽ)

- b) Giới hạn:

- Khi C tiến tới A : AC thành tiếp tuyến tại A của (O) , cắt cung chứa góc 45° (ở trên) tại E_1 (E_1 cũng là giao điểm của BI với cung chứa góc 45° vẽ qua A, B)
- Khi C tiến tới B : BD thành tiếp tuyến tại B của (O) , cắt cung chứa góc 45° (ở trên) tại E_2 (E_2 cũng là giao điểm của AI với cung chứa góc 45° vẽ qua A, B)

Do đó: E chỉ chuyển động trên phần cung $\widehat{E_1E_2}$ (như hình vẽ, loại 2 điểm E_1, E_2)

- c) Phản đảo:

- Lấy điểm E' bất kỳ trên phần đã giới hạn ở trên cung $\widehat{E_1E_2}$. Nối AE, BE' cắt nửa đường tròn tại $C'D'$

- $\widehat{AF'B}$ là góc có đỉnh ở ngoài (O) nên $s\widehat{AF'B} = \frac{1}{2} (s\widehat{AB} - s\widehat{C'D'})$

$$\Leftrightarrow 2.45^\circ = 180^\circ - s\widehat{C'D'} \Leftrightarrow s\widehat{C'D'} = 90^\circ$$

Do đó $C'D'$ trương cung có số đo 90° là cạnh của hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ suy ra $C'D' = R\sqrt{2}$

Vậy E' thỏa mãn các điều kiện của đề bài

Kết luận: Tập hợp các điểm E là cung nhỏ $\widehat{E_1E_2}$ (như hình vẽ, loại E_1, E_2)

4) Gọi J là giao điểm của EK và CD

$$\bullet \quad \widehat{F_1} = \frac{\widehat{AFC}}{2} = \frac{1}{4}(\widehat{AC} - \widehat{DB}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \widehat{J_1} &= \widehat{E_1} + \widehat{D_1} \text{ (góc ngoài của } \triangle EDJ) \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AEB} + 180^\circ - \widehat{D_2} \quad (\widehat{D_1}, \widehat{D_2} \text{ kề bù}) \\ &= \frac{1}{4}(\widehat{AB} - \widehat{CD}) + 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAC} \quad (2) \end{aligned}$$

Cộng (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{F_1} + \widehat{J_1} &= \frac{1}{4}(\widehat{AC} - \widehat{DB} + \widehat{AB} - \widehat{CD}) + 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAC} \\ &= \frac{1}{4}(\widehat{AC} + \widehat{AB}) - \frac{1}{4}(\widehat{DB} + \widehat{CD}) + 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAC} \\ &= 180^\circ + \frac{1}{4} \widehat{BAC} - \frac{1}{2} \widehat{BAC} - \frac{1}{4} \widehat{BDC} \\ &= 180^\circ - \frac{1}{4}(\widehat{BAC} + \widehat{BDC}) = 180^\circ - \frac{1}{4}(\widehat{BACDB}) \\ &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{4} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{J_1} = 90^\circ \Rightarrow \triangle KJF$ vuông tại K. Vậy \widehat{EKF} là góc vuông

ĐỀ 34

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (P)

a) Xác định các hệ số a, b, c biết rằng đồ thị (P) của hàm số đi qua các điểm $A(0; -1); B(1; 0)$ và $C(-1; 2)$

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = mx - 1$ tiếp xúc với đồ thị của hàm số vừa xác định ở câu a

Câu 2: Cho biểu thức $A = -2x^3 + 4x^2 - x - 1$.

Tính giá trị của A khi $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Câu 3: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 5x - y = 1 \end{cases} \quad (I)$$

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m = 3$

b) Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x > 0, y < 0$

Câu 4: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Từ điểm D nằm giữa O và C vẽ đường thẳng vuông

góc với BC , cắt các đường thẳng AB, AC tại E, F và cắt (O) tại I, K . CE cắt (O) tại J

- 1) Chứng tỏ D là trung điểm của IK và C là điểm chính giữa của cung IK
- 2) Chứng minh 3 điểm B, F, J thẳng hàng
- 3) Chứng minh $FA.FC = FD.FE = FI.FK$
- 4) Chứng tỏ 2 tiếp tuyến của (O) tại A, J và đường thẳng EF đồng qui tại một điểm, điểm này có vị trí đặc biệt gì trên đoạn EF ?

Giải

Câu 1:

a) (P) đi qua $A(0; 1) \Rightarrow -1 = c$

(P) đi qua $B(1; 0) \Rightarrow 0 = a + b - 1$

(P) đi qua $C(-1; 2) \Rightarrow 2 = a - b - 1 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$. Vậy (P) $y = 2x^2 - x - 1$

b) Đường thẳng $y = mx - 1$ tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình $2x^2 - x - 1 = mx - 1$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow 2x^2 - (m+1)x = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Câu 2: Ta có $A = -2x^3 + 4x^2 - x - 1 = (2-x)(2x^2+1) - 3$

Thay $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ vào ta có: $A = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} + 1 \right) - 3 = 0$

Câu 3:

a) Giải hệ phương trình khi $m = 3$

Khi $m = 3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{17} \\ y = \frac{13}{17} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+m}{17} \\ y = \frac{5(m+3)}{17} - 1 = \frac{5m-2}{17} \end{cases}$

Vì điều kiện $x > 0, y < 0$ ta có: $\begin{cases} \frac{3+m}{17} > 0 \\ \frac{5m-2}{17} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \frac{2}{5}$

Câu 4:

- 1) BC là đường kính của (O) vuông góc với dây cung IK tại D và cắt cung IK tại C nên ta được

- D là trung điểm dây cung IK
- C là trung điểm cung IK (vì có 2 góc $\widehat{IOC} = \widehat{COK}$)

- 2) $\triangle EBC$ có 2 đường cao là CA và ED cắt nhau tại F nên F là trực tâm của \triangle

- Trong (O): \widehat{BJC} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{BJC} = 90^\circ \Rightarrow BJ \perp CE$
Vậy BJ cũng là đường cao của $\triangle EBC$

Suy ra trực tâm F nằm trên BJ, nói cách khác: 3 điểm B, F, J thẳng hàng

- 3) Hai tam giác vuông AFE và DFC có góc F bằng nhau góc đối đỉnh nên chúng đồng dạng $\Rightarrow \frac{AF}{DF} = \frac{FE}{FC} \Leftrightarrow FA \cdot FC = FD \cdot FE$ (1)

Hai tam giác FAI và FCK có: $\widehat{IFA} = \widehat{CFK}$ (đối đỉnh); $\widehat{FAI} = \widehat{FKC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI)

$$\text{Do đó } \triangle FAI \sim \triangle FKC \Rightarrow \frac{FA}{FK} = \frac{FI}{FC} \Leftrightarrow FA \cdot FC = FI \cdot FK \quad (2)$$

Vậy từ 2 đẳng thức (1) và (2) ta được: $FA \cdot FC = FD \cdot FE = FI \cdot FK$

- 4) Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và EF

- \widehat{MAC} là góc hợp bởi tia tiếp tuyến AM và dây cung AC của (O) nên $\text{sđ } \widehat{MAC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC}$

- \widehat{AFM} là góc có đỉnh ở trong (O) nên

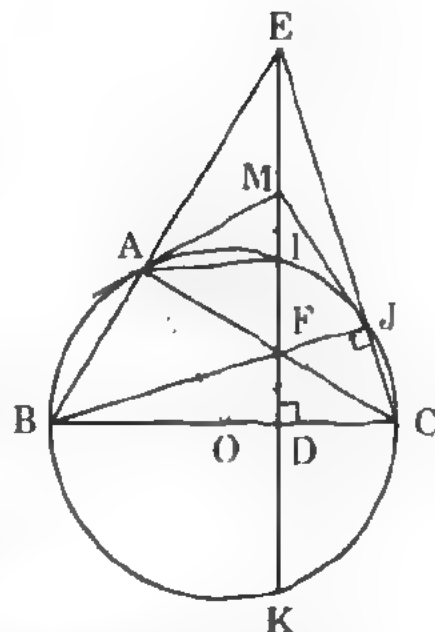
$$\begin{aligned} \text{sđ } \widehat{AFM} &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AI} + \text{sđ } \widehat{CK}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AI} + \text{sđ } \widehat{CI}) \quad (\widehat{CK} = \widehat{CI} \text{ theo chứng minh trên}) \\ &= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AIC} \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{MAF} = \widehat{AFM} \Rightarrow \triangle MAF$ cân tại M $\Rightarrow MA = MF$

Ta suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{MAE}$ (vì cùng phụ với $\widehat{AFM} = \widehat{MAF}$)

Do đó $\triangle MAE$ cân tại M $\Rightarrow MA = ME$

Vậy: trong tam giác vuông AFE ta có $MA = ME = MF$ nói khác đi M là trung điểm cạnh huyền EF



- Trong $\triangle JEF$ vuông tại J , trung tuyến $JM \perp EF \Rightarrow MJ \perp MA$

Xét 2 tam giác $\triangle AMO$ và $\triangle MOJ$ có 3 cạnh bằng nhau đôi một ($AO = OJ = R$, MO chung và $MA = MJ$ (theo chứng minh trên))

Nên $\triangle AMO = \triangle MOJ \Rightarrow \angle MAO = \angle MOJ = 90^\circ$

Do đó MJ cũng là tiếp tuyến của (O)

Vậy: 2 tiếp tuyến của (O) tại A và J cắt cắt EF tại trung điểm M của đoạn EF

ĐỀ 35

Câu 1: Cho phương trình $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m - 3m + 2 = 0$

- Chứng tỏ rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m
- Tìm m để có tích của hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 2: Thu gọn các biểu thức sau

$$A = \left(2\sqrt{4 + \sqrt{6}} - 2\sqrt{5} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right) \left(1 - \frac{2}{a + 1} \right)^2 \quad \text{với } a > 0, a \neq 1$$

Câu 3:

- Một tấm tôn hình chữ nhật có chiều dài là 48cm, người ta cắt bỏ mỗi góc một hình vuông có cạnh 2cm, rồi gập lên thành hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích là 96cm³. Tính các kích thước của tấm tôn hình chữ nhật
- Giải phương trình $|x| - |x - 2| = 2$

Câu 4: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B (tâm của đường tròn này ở ngoài đường tròn kia) gọi AC , AD lần lượt là đường kính của (O) và (O')

- Chứng minh rằng OO' vuông góc với AB tại trung điểm của AB
- Chứng minh C, B, D thẳng hàng và $CD = 2OO'$
- Qua B vẽ đường thẳng cắt (O) tại E cắt (O') tại F (B nằm giữa E và F) chứng tỏ số đo góc EAF luôn luôn không đổi.
- Tiếp tuyến của (O) tại E và tiếp tuyến của (O') tại F cắt nhau tại I . Chứng tỏ cát tuyến BEF quay quanh B , góc EIF có số đo không đổi và 4 điểm A, E, I, F luôn luôn nằm trên cùng 1 đường tròn

Giải

Câu 1:

a) $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

Ta có $\Delta' = (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 1 > 0$

Suy ra phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m

b) Theo định lý Viét $P = x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{4} = \frac{1}{4} \left(m - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Vậy $P = x_1 x_2$ nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{16}$ xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Câu 2:

a) $A = \left(\sqrt{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2})$
 $= \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = (\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8$

$B = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2 = \left(\frac{a-2\sqrt{a}+1+a+2\sqrt{a}+1}{a-1} \right) \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2$
 $= \frac{2(a+1)}{a-1} \cdot \left(\frac{a-1}{a+1} \right) = \frac{2(a-1)}{a+1}$

Câu 3:

a) Chu vi miếng tôn là 48cm nên nửa chu vi là 24cm

Gọi x (cm) là chiều rộng miếng tôn $x > 0$ thì $(24 - x)$ (cm) là chiều dài
 $0 < x < 12$. Khi cắt bỏ 4 góc bốn hình vuông cạnh 2 cm thì chiều rộng còn lại là $(x - 4)$ (cm), chiều dài còn lại là $(20 - x)$ (cm)

Giả thiết ta có $(x - 4)(20 - x) \cdot 2 = 96$

$\Leftrightarrow (x - 4)(20 - x) = 48 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 128 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8, x_2 = 16$ (loại)

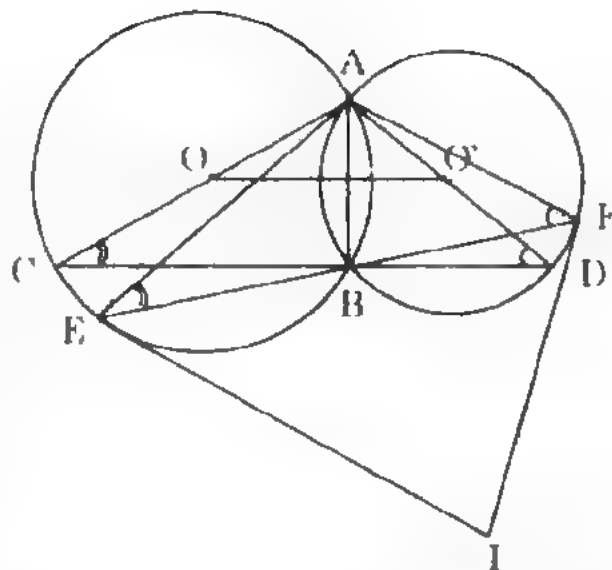
b) Giải phương trình $|x| - |x - 2| = 2$ (1)

- Khi $x \leq 0$ thì (1) trở thành: $-x + x - 2 = 0$ (VN)
- Khi $0 < x < 2$ thì (1) trở thành: $x + x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 2$ (loại)
- Khi $x \geq 2$ thì (1) trở thành: $x - x + 2 = 2$: phương trình vô số nghiệm $x \geq 2$

Vậy khi $x > 2$: phương trình (1) có vô số nghiệm $x \geq 2$

Câu 4:

- 1) O, O' là hai điểm cách đều A và B nên đường thẳng OO' là đường trung trực của AB . Vậy $OO' \perp AB$ tại trung điểm của AB hay nói OO' là đường trung trực
- 2) • \widehat{ABC} và \widehat{ABD} là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $(O), (O')$ nên là 2 góc vuông suy ra \widehat{ABC} và \widehat{ABD} là 2 góc kề bù. Vậy 3 điểm C, B, D thẳng hàng



- Trong $\triangle ACD$, OO' là đường trung bình nên $OO' \parallel CD$ và $OO' = \frac{CD}{2}$
- 3) • $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (2 góc nội tiếp trong (O) cùng chắn cung \widehat{AB})
 $\widehat{AFB} = \widehat{ADB}$ (2 góc nội tiếp trong (O') cùng chắn cung \widehat{AB})
- Suy ra hai tam giác AEF và ACD có hai góc bằng nhau đối một nên góc thứ ba bằng nhau: $\widehat{EAF} = \widehat{CAD}$ có số đo không đổi ($\triangle AEF$ và $\triangle ACD$ đồng dạng nhau)
- 4) • Trong (O) : $\widehat{BEI} = \widehat{BAE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến EI và dây cung EB , góc nội tiếp BAE cùng chắn cung \widehat{BE})
Trong (O') , $\widehat{BFI} = \widehat{BAF}$ (tương tự như trên)
Suy ra: $\widehat{BEI} + \widehat{BFI} = \widehat{BAE} + \widehat{BAF} = \widehat{EAF}$ (vì tia AB nằm giữa 2 tia AE và AF)
- Do đã có $\widehat{EAF} = \widehat{CAD}$ (chứng minh trên) nên trong $\triangle EIF$ ta được:
$$\widehat{EIF} = 180^\circ - (\widehat{IEF} + \widehat{IFE}) = 180^\circ - \widehat{EAF}$$
- Vậy $\widehat{EIF} = 180^\circ - \widehat{CAD}$ không đổi
- Do đã có $\widehat{EIF} + \widehat{EAF} = 180^\circ$ nên 4 điểm A, E, I, F cùng nằm trên đường tròn (tứ giác có 2 góc đối diện bù nhau)

ĐỀ 36

Câu 1: Cho phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$

a) Định m để phương trình có nghiệm

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$$

Câu 2: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x} - 1}$

a) Rút gọn P ;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0, -1)$ có hệ số góc k

a) Viết phương trình đường thẳng (d) . Chứng minh với mọi giá trị k , (d) luôn luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B

b) Gọi hoành độ của A và B là x_1 và x_2 , chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$

Câu 4: Cho nửa đường tròn đường kính AB và C, D là hai điểm trên đó, AC và AD cắt tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn lần lượt tại E, F

a) Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{AFB}$, $\widehat{ABC} = \widehat{AEB}$

b) Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp được

c) Gọi I là trung điểm của FB . Chứng minh rằng DI là tiếp tuyến của nửa đường tròn

d) Giả sử CD cắt Bx tại G , phân giác của góc CGE cắt AE, AF lần lượt tại M, N . Chứng minh $\triangle AMN$ cân

Giải

Câu 1:

a) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$

• Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Phương trình trở thành: $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy khi $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = -2$

• Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$; $\Delta' = (m + 2)^2 - (m + 1)(m - 3) = 6m + 7$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m + 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq -1, m \geq -\frac{7}{6}$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}$ và $m \neq -1$

b) Điều kiện: $n \geq -\frac{7}{6}, m \neq -1$

Theo định lý Viet ta có
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ P = x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

Do đó $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 16 \Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 1 = 17 = 0$

$\therefore \frac{16(m-3)}{m+1} + \frac{8(m+2)}{m+1} - 17 = 0 \Leftrightarrow 16(m-3) + 8(m+2) - 17(m+1) = 0$

$\Leftrightarrow 7m - 49 \Leftrightarrow m = 7$ (thỏa điều kiện $m \neq -1, m \geq -\frac{7}{6}$)

Vậy $m = 7$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 16$

Câu 2:

a) Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$

Ta có: $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x}-1+2(\sqrt{x}+1) = x-\sqrt{x}+1$

b) $P = x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4}$

Câu 3:

a) Phương trình đường thẳng (d): $y = kx - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 + kx - 1 = 0(*)$

Vì (*) có $\Delta = k^2 + 4 > 0 \forall k$, nên (d) luôn luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

b) Ta có $x_1x_2 = -1$, từ đó ta có $|x_1 - x_2| = x_1 + \frac{1}{x_1}$

Nhận xét rằng x_1 và $\frac{1}{x_1}$ cùng dấu nên: $\left|x_1 + \frac{1}{x_1}\right| = |x_1| \left|\frac{1}{x_1}\right| \geq 2$

Vậy $|x_1 - x_2| \geq 2$ (đpcm)

Câu 4:

a) Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{AFB}; \widehat{ABC} = \widehat{AEB}$

Lưu ý rằng hai góc \widehat{ABD} và \widehat{AFB} có hai cặp cạnh tương ứng vuông góc BA \perp FB và BD \perp FA nên chúng bằng nhau: $\widehat{ABD} = \widehat{AFB}$

Tương tự ta cũng có $\widehat{ACB} = \widehat{AEB}$

b) Tứ giác CDEF nội tiếp

Do tứ giác ABCD nội tiếp nên ta có

$$\widehat{ECD} = \widehat{ABD} \text{ (cùng bù với } \widehat{ACD} \text{)}$$

Ta có $\widehat{ECD} = \widehat{DFB}$ (câu a)

$$\text{Vậy } \widehat{ECD} + \widehat{DFE} = \widehat{DFB} + \widehat{DFE} = 180^\circ$$

Điều này chứng tỏ tứ giác CDEF nội tiếp được

c) DI là tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho

Tam giác ABF có OI là đường trung bình

do đó $OI \parallel AF \Rightarrow OI \perp DB$

Bởi vậy B và D đối xứng nhau qua OI và $\triangle OBI = \triangle ODI$

$$\Rightarrow \widehat{ODI} = \widehat{OBI} = 90^\circ$$

Điều này chứng tỏ DI là tiếp tuyến của đường tròn

d) Chứng minh tam giác AMN cân

Xét tam giác NEG có: $\widehat{N}_1 = \widehat{NEG} + \widehat{EGN}$ (\widehat{N}_1 là góc ngoài \triangle)

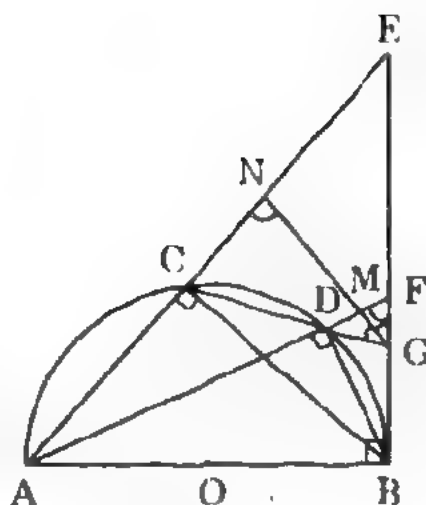
Tương tự với $\triangle DMG$ ta có $\widehat{DMN} = \widehat{MDG} + \widehat{MGD}$

Mặt khác $\widehat{MGD} = \widehat{EGN}$ (do NG là phân giác góc \widehat{CGE})

$$\widehat{MDG} = \widehat{CDA} = \widehat{CBA} = \widehat{AEB} \text{ (theo câu a)}$$

Từ đó suy ra $\widehat{N}_1 = \widehat{DMN}$

Vậy $\triangle AMN$ cân tại A



ĐỀ 37

Câu 1: Thu gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$

Câu 2:

1) Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để có $x_1^2 + x_2^2 = 13$

2) Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$ b)

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

Câu 3: Một chiếc đò đi theo dòng nước từ A đến B dài 180km. Khi đi ngược dòng chậm hơn khi xuôi dòng 3km mỗi ngày và thời gian đi từ A đến B ít hơn đi từ B đến A là 3 ngày. Hỏi thời gian đi từ A đến B?

Câu 4: Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), các đường phân giác trong của các góc B, C lần lượt cắt đường tròn tại E, F. Dây cung EF cắt AC, AB lần lượt tại H, I và EB cắt FC tại K.

a) Chứng minh các tam giác FKB và EAK cân.

b) Chứng minh tứ giác FIKB nội tiếp. Từ đó suy ra $IK \parallel AC$.

c) Có nhận xét gì về tứ giác AIKH?

Giải

Câu 1: $A = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \sqrt{6(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = -1$$

Câu 2:

1) $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 9 > 0 \\ 2m < 0 \\ -6m - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2} \text{ và } m \neq -3$$

b) Theo định lý Viét ta có $S = x_1 + x_2 = 2m$, $P = x_1 x_2 = -6m - 9$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, m = -\frac{5}{2}$$

2.a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ xy(x + y) = 30 \end{cases} \quad (I)$

Đặt $u = x + y$, $v = xy$; (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 30 \end{cases}$

Vậy u, v là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - 11X + 30 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 6 \\ v = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases}. \text{ Ta giải 2 hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Ta được 4 nghiệm (x, y) sau: $(1; 5); (5; 1); (2; 3); (3; 2)$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$. Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$

$$\begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ \frac{y-x}{-64} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ x-y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+16)y = -64 \\ x-y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 16y + 64 = 0 \\ x-y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -8 \end{cases}$$

Câu 3:

Gọi x (km/ngày) là vận tốc khi đi xuôi dòng, khi đó ta có $(x - 3)$ (km/ngày) là vận tốc khi đi ngược dòng. Ta có $\frac{180}{x-3} - \frac{180}{x} = 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0$$

Từ đó ta có $x = 15$ (loại nghiệm âm) và thời gian đi từ A đến B là 12 ngày

Câu 4:

a) Chứng minh các tam giác FKB và EAK cân

Xét $\triangle FKB$, ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{FKB} &= \frac{1}{2}(\widehat{FEB} + \widehat{ECB}) \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{AFB} + \widehat{AEB}) = \frac{1}{2}\widehat{FEA} = \widehat{FBK} \end{aligned}$$

Vậy $\triangle FKB$ cân tại F

Chứng minh tương tự ta có $\triangle EKC$ cân tại E $\Rightarrow EC = EK$

Mặt khác: $AE = EC \Rightarrow AE = EK \Rightarrow \triangle EAK$ cân tại E

b) Tứ giác FIKB nội tiếp $\Rightarrow IK \parallel AC$

$$\text{Ta có } \left. \begin{aligned} \widehat{IFK} &= \frac{1}{2}\widehat{ECB} \\ \widehat{IBK} &= \frac{1}{2}\widehat{AEB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{IFK} = \widehat{IBK}$$

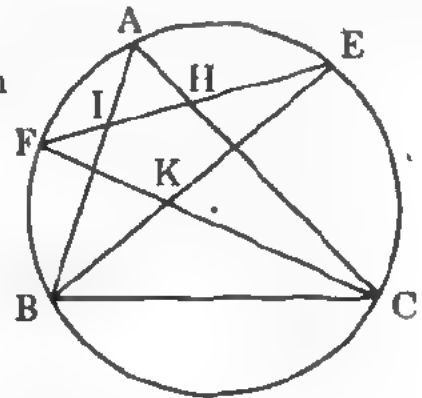
Vậy FIKB có 2 góc chéo bằng nhau \Rightarrow FIKB nội tiếp

Từ đó suy ra $\widehat{IKF} = \widehat{IBF}$ (cùng chắn cung IF)

Mặt khác $\widehat{ACF} = \widehat{ABF}$ (cùng chắn cung AF). Do đó $\widehat{IKF} = \widehat{ACF}$

Hai góc này ở vị trí đồng vị nên IK song song với AC

c) Nhận xét tứ giác AIKH. Chứng minh tương tự ta có $HK \parallel AB$. Bởi vậy tứ giác AHKI là hình bình hành



ĐỀ 38

Câu 1:

a) Tính $A = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

b) Giải phương trình $\sqrt{x+1} = x-1$

Câu 2: Cho hệ phương trình $$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = m \end{cases}$$

a) Chứng tỏ lúc $m = 1$ là hệ phương trình có vô số nghiệm

b) Giải hệ phương trình khi $m \neq 1$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho $(P): y = x + m$ và (D) là đường thẳng có phương trình $y = -x + m$

a) Tìm a biết (P) qua $A(2, -1)$ và vẽ (P) với a vừa tìm được

b) Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P) ở câu 1, và tìm tọa độ tiếp điểm

c) Gọi B là giao điểm của (D) (câu 2) với trục tung, C là điểm đối xứng của $A(2, -1)$ qua trục tung. Chứng minh $C \in (P)$ và $\triangle ABC$ vuông cân

Câu 4: Cho hai điểm A, B thuộc đường tròn (O) (AB không đi qua O) và có 2 điểm C, D di động trên cung lớn \widehat{AB} sao cho AD song song với BC . (C, D khác A và B và $AD > BC$). Gọi M là giao điểm của BD và AC . Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại điểm I

a) Chứng minh 3 điểm I, O, M thẳng hàng

b) Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD bằng $\frac{1}{2}AB$

Giải

Câu 1:

a) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3} - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$$

b) $\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 = (x-1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$

Câu 2:

a) $m = 1$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm (nghiệm có tọa độ nằm trên đường thẳng $y = x - 1$)

b) Khi $m \neq 1$

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - x = 1 - m \\ -x + y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(m - 1) = 1 - m \\ y = -m + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -m - 1 \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ phương trình khi } m \neq 1$$

Câu 3:

a) Điểm $A(2, -1) \in (P) \Leftrightarrow -1 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

$$(P) y = -\frac{1}{4}x^2$$

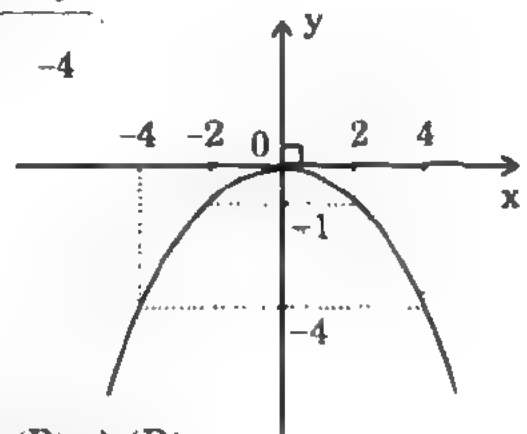
- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$
- Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ là một

Parabol có đỉnh $O(0, 0)$ nằm dưới trục hoành, nhận Oy làm trục đối xứng



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D)

$$-\frac{x^2}{4} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4m = 0 \quad (*)$$

$\Delta' = 4 - 4m$, (D) tiếp xúc với (P) \Leftrightarrow phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Nghiệm kép của phương trình (*) là $x = 2 \rightarrow$ tiếp điểm $A(2, -1)$

Câu 4: Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kỳ trên cạnh Oy . Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E . Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là F

- Chứng minh 4 điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó
- Tứ giác $OCFM$ là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh hệ thức $OE \cdot OF + BE \cdot BM = OB^2$.
- Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $OCFM$ là hình bình hành. Tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi

Giải

Câu 1:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{7} + \frac{2x+y}{17} = 7 \\ \frac{4x+y}{5} + \frac{y-7}{19} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 31x - 10y = 833 \\ 76x + 24y = 1460 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 31x - 10y = 833 \\ 19x + 6y = 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 93x - 30y = 2499 \\ 95x + 30y = 1825 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = -12 \end{cases}$$

Câu 2:

a) Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{-x^2}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

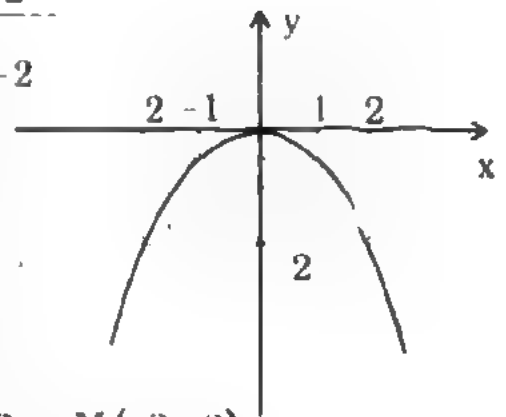
Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là một Parabol có đỉnh $O(0, 0)$ là điểm cực đại, nằm phía dưới trục hoành có trục tung là trục đối xứng

$$\text{Vì } M \in P \Rightarrow y_M = -\frac{1}{2}x_M^2 = -\frac{1}{2}(-2)^2 = -2 \Rightarrow M(-2, -2)$$

$$\text{Vì } N \in P \Rightarrow y_N = -\frac{1}{2}x_N^2 = -\frac{1}{2}(+1)^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow N\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

Đường thẳng MN không song song với Oy nên phương trình có dạng $y = ax + b$

$$\begin{cases} M \in MN \Leftrightarrow -2 = -2a + b \\ N \in MN \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$



Vậy phương trình đường thẳng MN là $y = \frac{1}{2}x - 1$

Câu 3: Gọi x (m) là chiều dài mảnh vườn, thì $\frac{1200}{x}$ (m) là chiều rộng mảnh vườn

Theo giả thiết ta có: $(x + 5) \left(\frac{1200}{x} - 10 \right) = 1200 - 300$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25x + 600 = 0 \Leftrightarrow x = 40, x = 15 \text{ (loại)}$$

Vậy chiều dài mảnh vườn là 40m, chiều rộng 30m

Câu 4:

a) Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{AEM} = 90^\circ$. Nên tứ giác OAEM nội tiếp đường tròn đường kính MA

b) Tứ giác OAEM nội tiếp

Suy ra $\widehat{OMA} = \widehat{OEM}$

Bốn điểm A, E, F, C cùng nằm trên đường tròn (T) nên $\widehat{OFA} = \widehat{ACF}$

Do đó $\widehat{OMA} = \widehat{ACF} \Rightarrow FC \parallel OM$

Vậy OCFM là hình thang

$$c) \triangle OFA \sim \triangle OBE \Rightarrow \frac{OF}{OB} = \frac{OA}{OE} \Rightarrow OE \cdot OF = OA \cdot OB \quad (1)$$

$$\triangle OBM \sim \triangle EBA \Rightarrow \frac{OB}{EB} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow BE \cdot BM = BA \cdot BO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $OE \cdot OF + BE \cdot BM = OB^2$.

d) Gọi giao điểm của CM với OF là I và CF với OB là H

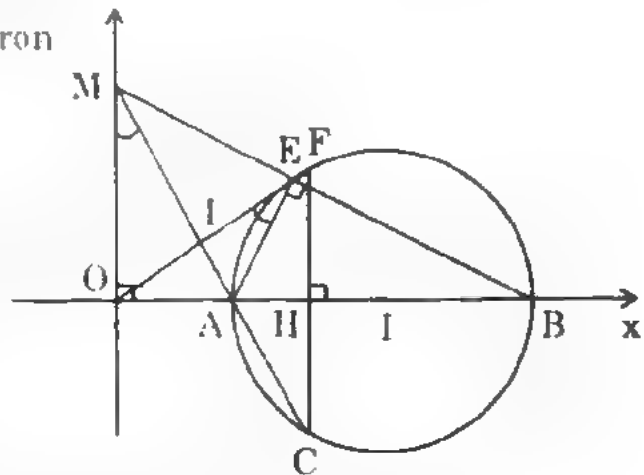
Hình thang OCFM là hình bình hành \Leftrightarrow I là trung điểm của OF \Leftrightarrow A là trung tâm $\triangle OCF \Leftrightarrow OA = 2AH$. Từ đó ta có cách dựng sau:

- Dựng điểm H trên tia OA thỏa $OA = 2AH$
- Qua H dựng đường thẳng vuông góc với OB cắt (T) tại F và (C)
- Nối AC cắt Oy tại M thì M là điểm cần dựng

Khi OCFM là hình bình hành, muốn nó là hình thoi thì $CI \perp OF$.

Suy ra $\triangle OCF$ đều, A là tâm của tam giác đều $\triangle OCF$ nên $\widehat{CAT} = 60^\circ$

$$\Rightarrow OA = AC = AT = \frac{AB}{2}$$



ĐỀ 40

Câu 1: Cho $A = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa

b) Rút gọn A

Câu 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m

Câu 3:

1) Trong cùng 1 hệ trục vuông góc Oxy, cho $(P) : y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(D) : y = mx - 2m - 1$

a) Vẽ (P)

b) Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P)

c) Chứng tỏ (D) luôn luôn đi qua điểm cố định $A \in (P)$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH và trung tuyến AM . Vẽ đường tròn tâm H bán kính AH . Cắt AB ở điểm D , cắt AC ở điểm E (D và E khác A)

a) Chứng minh D, H, E thẳng hàng

b) Chứng minh $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$ và MA vuông góc với DE

c) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn tâm O Tứ giác $AMOH$ là hình gì ?

d) Cho góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$ và $AH = a$. Tính diện tích $\triangle HEC$

Giải

Câu 1:

$$\begin{aligned} \text{a) } A \text{ có nghĩa: } &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - \sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \neq 0 \\ x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \left[(\sqrt{x})^3 - 1 \right] \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\sqrt{x})^3 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\sqrt{x})^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \Delta &= \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{x+1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} \left[(\sqrt{x})^3 - 1 \right]} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + x + 1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{x-1}
 \end{aligned}$$

Câu 2:

a) $m = 1$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 3y = 15 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 14 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6mx + 3y = 15 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7mx = 14 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -2 \\ y = \frac{1-mx}{3} \end{cases} \quad (*)$

• $m = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = -2 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ (VN); • $m \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{m} \\ y = 1 \end{cases}$ là

nghiệm

Câu 3:

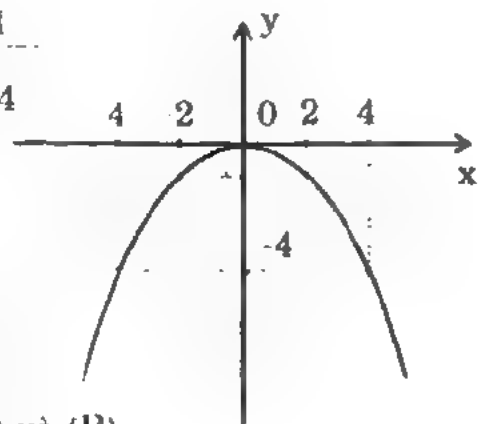
Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Bảng giá trị:

x	4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	4	1	0	-1	4

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ là

đường cong parabol có $O(0, 0)$ là đỉnh cực đại, nằm dưới trục hoành, nhận Oy làm trục đối xứng



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P)

$$-\frac{x^2}{4} = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0 \quad (*)$$

Có $\Delta' = 4m^2 + 8m + 4 = 4(m+1)^2$. (D) tiếp xúc với P \Leftrightarrow phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -1$

c) Gọi $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định thuộc (D)

$$\Leftrightarrow y_0 = mx_0 - 2m - 1 \text{ đúng } \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 - 2) - 1 - y_0 = 0 \text{ đúng } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ -1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(2, -1)$$

$$\text{Giả sử } A \in (P) \Leftrightarrow -1 = \frac{-(2)^2}{4} \Leftrightarrow -1 = -1 \text{ đúng}$$

Vậy $A \in (P)$. Do đó (D) luôn luôn đi qua điểm cố định $A(2, -1) \in (P)$

Câu 4:

a) Ta có $\widehat{DAE} = 90^\circ \Rightarrow DE$ là đường kính của đường tròn (H, AH)
 $\Rightarrow D, E, H$ thẳng hàng

b) $\triangle ABC$ vuông tại A có AM là trung tuyến (giả thiết) A

$$\Rightarrow AM = MB = MC = \frac{BC}{2}$$

$\triangle MAC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MCA}$ (1)

$HA = HD$ (vì $A, D \in$ đường tròn (H, AH))

$\triangle HAD$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{BAH}$ (2)

Mà $\widehat{MCA} = \widehat{BAH}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc) (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$

Gọi I là giao điểm của AM và DE

Ta có : $\widehat{MAE} + \widehat{DAI} = \widehat{DAE}$

Do đó $\widehat{ADE} + \widehat{DAI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ \Rightarrow MA \perp DE$

c) Từ (2) và (3) ta có $\widehat{ADE} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow B, C, D, E$ cùng thuộc một đường tròn tâm O

M là trung điểm dây BC nên $OM \perp BC$

H là trung điểm dây DE nên $OH \perp DE$

Ta có $AH \perp BC$ (giả thiết) và $OM \perp BC \Rightarrow AH \parallel OM$

$MA \perp DE$ (câu b) và $OH \perp DE \Rightarrow MA \parallel OH$

Tứ giác $AMOH$ có $AH \parallel OM, MA \parallel OH$ nên tứ giác $AMOH$ là hình bình hành

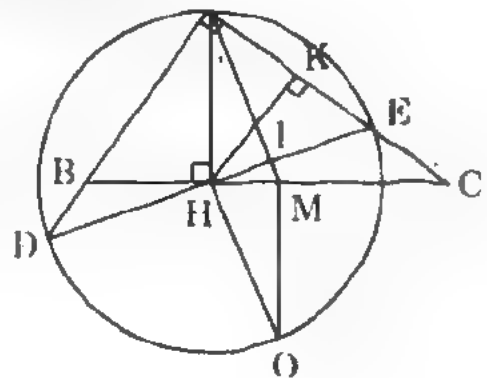
d) Vẽ HK vuông góc với AC . $\triangle HAC$ vuông tại H có $\widehat{ACH} = 30^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \triangle HAC$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{HAE} = 60^\circ, AC = 2AH = 2a$

$\triangle HAE$ cân tại H ($HA = HE$) có $\widehat{HAE} = 60^\circ \Rightarrow \triangle HAE$ đều

$$\Rightarrow AE = HE = a, HK = \frac{AH\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } EC = AC - AE = 2a - a = a$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle HEC} = \frac{1}{2} EC \cdot HK = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ (dvdt)}$$



ĐỀ 41

Câu 1:

a) Rút gọn các biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 - c + a + 1} - \frac{1}{a + 1}$ $Q = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

b) Giải phương trình: $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Câu 2: Trong một phẳng tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng: $d_1 : y = 2x - 7$

và

$$d_2 : y = x - 1$$

a) Vẽ hai đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục Oxy

b) Bằng đồ thị, xác định tọa độ giao điểm của d_1 , d_2 . Rồi kiểm tra bằng phép tính

Câu 3: Hai chiếc máy cày cùng làm chung thửa ruộng trong 4 giờ cày xong một

thửa ruộng. Nếu để mỗi chiếc máy cày cày riêng thửa ruộng này xong trước máy cày kia là 6 giờ. Hỏi nếu cày riêng, mỗi máy cày phải mất bao lâu mới cày xong thửa ruộng

Câu 4: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, gọi K là trung điểm của

cung \widehat{AB} , M là điểm di động trên cung nhỏ \widehat{AK} ($M \neq A$); K là điểm N trên đoạn BM sao cho $BN = AM$

a) Chứng minh $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

b) Chứng minh tam giác MNK vuông cân

c) Hai đường thẳng AM và OK cắt nhau tại D. Chứng minh MK là đường phân giác của góc \widehat{DMN}

d) Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Câu 1:

a) Ta có: $P = \frac{4a^2 - 4}{a^2 - c + a + 1} = \frac{4(a - 1)(a + 1)}{(a - 1)c + (a - 1)}$

$$P = \frac{4(a - 1)(a + 1)}{(a - 1)(c + 1)} = \frac{4(a + 1)}{c + 1} \quad (\text{điều kiện } a \neq 1)$$

$$\bullet Q = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

b) Giải phương trình $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ (1)

Đặt $u = x^2 \geq 0$ thì (1) trở thành $u^2 - 6u + 8 = 0$ có $\Delta' = 9 - 8 = 1$

$$(1) \Leftrightarrow u_1 = \frac{3-1}{1} = 2, \quad u_2 = \frac{3+1}{1} = 4$$

$$\bullet \quad u = x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2};$$

$$\bullet \quad u = x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Câu 2:

$$d_1: y = 2x - 7, \quad d_2: y = -x - 1$$

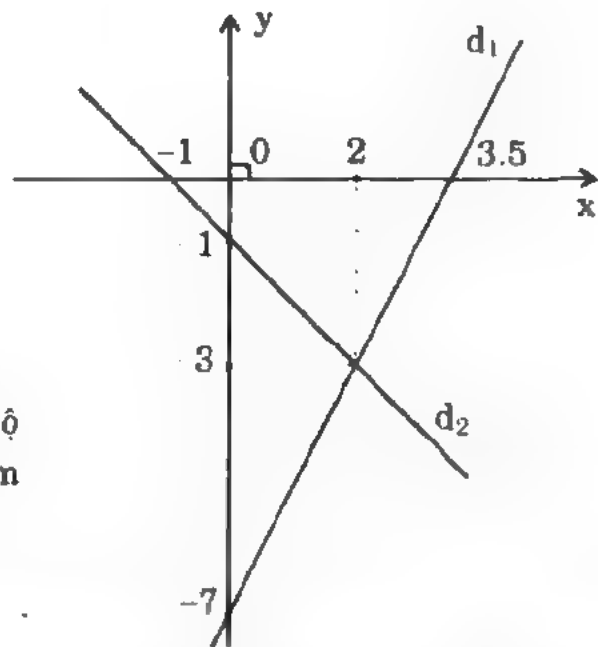
$$d_1: \begin{cases} \text{cho } x = 0 \Rightarrow y = -7 \\ \text{cho } y = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$d_2: \begin{cases} \text{cho } x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ \text{cho } y = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Nhờ đồ thị ta thấy d_1 cắt d_2 tại $M(2, -3)$

Kiểm tra bằng phép tính. Tọa độ giao điểm M của d_1, d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow M(2, -3)$$



Câu 3: Gọi $x(h)$ ($x > 0$) là thời gian máy cày thứ nhất, cày xong thửa ruộng, thì $(x + 6)(h)$ là thời gian máy cày thứ hai, cày xong thửa ruộng

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \quad (\text{điều kiện } x > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ (loại)} \\ x = 6 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy: máy cày thứ nhất cày xong thửa ruộng là 6h
máy cày thứ hai cày xong thửa ruộng là 12h

Câu 4:

a) Ta có $\triangle AKM = \triangle BNK$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

b) Từ kết quả câu a) $\triangle AMK = \triangle BNK$

Ta có $KM = KN$ và $\widehat{AKM} = \widehat{BKN}$

Mà $\widehat{BKN} + \widehat{AKN} = 90^\circ$

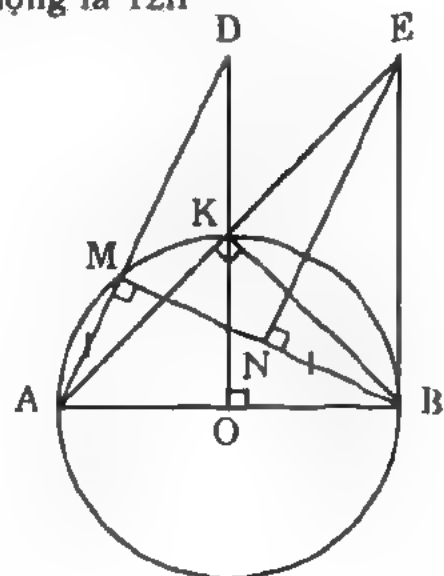
$$\Rightarrow \widehat{AKM} + \widehat{AKN} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle KMN$ vuông cân tại K

c) Từ kết quả câu b) tam giác MKN

vuông cân tại K nên $\widehat{NMK} = 45^\circ$

Do $\widehat{DMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DMK} = 45^\circ$



Suy ra MK là đường phân giác của DMN

d) Giả sử đường thẳng vuông góc với BM cắt AK tại E

Dễ nhận thấy rằng tứ giác BEKN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{MNK} = 45^\circ$

Mặt khác $\widehat{BAE} = 45^\circ$ nên $\triangle ABE$ vuông cân tại B, dẫn đến E cố định (điều phải chứng minh)

ĐỀ 42

Câu 1: Cho phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$

a) Định m để phương trình có nghiệm

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm

Câu 2: Giải các phương trình

a) $|2x^2 - 5x + 1| = |3x - 1|$

b) $-x^2 + 2 = \sqrt{2-x}$ c) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

Câu 3: Một canô chạy xuôi dòng từ A đến B, rồi chạy ngược dòng từ B đến A mất tất cả 4 giờ. Tính vận tốc của canô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30km và vận tốc của dòng nước là 4km/h

Câu 4: Cho đường tròn tâm (O) có dây cung AB. Trên tia AB lấy 1 điểm C nằm ngoài đường tròn. Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính PQ, cắt dây AB tại D. Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I, các dây AB và QI cắt nhau tại K

a) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp được

b) Chứng minh $CI \cdot CP = CK \cdot CD$

c) Chứng minh IC là tia phân giác của góc ngoài đỉnh I của $\triangle AIB$

d) C cố định A, B, C. Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua A, B thì đường thẳng QI luôn luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Câu 1:

a) $m = 0$, phương trình trở thành $-4x = 0 \Rightarrow x = 0$

$m \neq 0$ ta có $\Delta' = (m+2)^2 - m^2 = 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Vậy khi $m \geq -1$ thì phương trình cho có nghiệm

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 & (m \neq 0) \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 & (m \neq 0) \\ 1 > 0 \\ \frac{2(m+2)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Câu 2:

$$a) |2x^2 - 5x + 1| = |3x - 1| \Leftrightarrow (2x^2 - 5x + 1)^2 - (3x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 2x)(2x^2 - 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = 0, x = 1, x = 2 + \sqrt{3}, x = 2 - \sqrt{3}$

$$b) -x^2 + 2 = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 \geq 0 \\ (-x^2 + 2)^2 = 2 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 \geq 0 \\ (x - 1)(x + 2)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1, x = -2, x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$c) (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$$

$$\Leftrightarrow [(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] = 24$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 5x + 4 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow t(t + 2) = 24 \rightarrow t_1 = 4, t_2 = -6$$

- $t_1 = 4$ ta có $x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow x = 0, x = 5$

- $t = -6$ ta có $x^2 + 5x + 4 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10$ (VN)

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x = 0, x = 5$

Câu 3: Gọi x km/h là vận tốc của canô khi dòng nước yên lặng ($x > 4$) thì vận tốc của canô lúc xuôi dòng là $(x + 4)$ km/h, và vận tốc canô lúc ngược dòng là $(x - 4)$ km/h

Quãng sông AB dài 30km. Do đó thời gian canô đi xuôi dòng là

$$\frac{30}{x + 4} \text{ h và thời gian ngược dòng là } \frac{30}{x - 4} \text{ h}$$

ĐỀ 43

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} + 1$. Tìm các giá trị nguyên của a để biểu thức A nhận giá trị nguyên

Câu 2: Giải các phương trình:

a) $x + \frac{1}{x} = -2$

b) $\sqrt{x-5} = x-7$

Câu 3: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$

b) Xác định giá trị của m để hai đường thẳng có phương trình (1), (2) cắt nhau tại một điểm trên parabol $y = -2x^2$.

Câu 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Một điểm M thay đổi trên đường tròn (M khác A, B). Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H . Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC, BD đến đường tròn tâm M

a) Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn O

b) Chứng minh tổng $AC + BD$ không đổi. Từ đó tính giá trị lớn nhất của $AC \cdot BD$

c) Lấy điểm N cố định trên đường tròn (O) . Gọi I là trung điểm của MN , P là hình chiếu của I trên MB . Tìm quỹ tích của điểm P .

Giải

Câu 1:

a) Rút gọn $A = \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} + 1$

$$A = \frac{\sqrt{a}+1 - \sqrt{a}+1}{a-1} + 1 = \frac{2}{a-1} + 1 = \frac{2+a-1}{a-1} = \frac{a+1}{a-1}$$

b) Ta có $A = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$, A nhận giá trị nguyên khi $\frac{2}{a-1}$ nguyên,

$\frac{2}{a-1}$ nguyên khi $(a-1)$ là ước của 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = -1 & \Rightarrow a = 0 & \Rightarrow A = -1 \\ a-1 = 1 & \Rightarrow a = 2 & \Rightarrow A = 3 \\ a-1 = -2 & \Rightarrow a = -1 & \Rightarrow A = 0 \\ a-1 = 2 & \Rightarrow a = 3 & \Rightarrow A = 2 \end{cases}$$

Câu 2:

Ta có $4AC.BD = (AC + BD)^2 - (AC - BD)^2$

Bởi vậy tích $AC.BD$ lớn nhất khi và chỉ khi $(AC - BD)^2$ nhỏ nhất, tức là khi $AC = BD = OM$. Khi đó M là điểm chính giữa cung AB

c) Kéo dài PI cắt AN tại k , thế thì: $PK // AC$ (cùng vuông góc với MB)

Do I là trung điểm của MN nên K là trung điểm của AN . Bởi vậy K cố định. Từ đó suy ra P chạy trên đường tròn đường kính AB .

ĐỀ 44

Câu 1:

a) Giải phương trình $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x+9} + \sqrt{x^2-2x+26} = -x^2 + 2x + 8$

Câu 2: Cho $P = \left(\frac{b-a}{\sqrt{b}-a} - \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} \right) \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

a) Rút gọn P

b) Chứng tỏ rằng $P \geq 0$

Câu 3: Trong tháng đầu, hai tổ sản xuất được 500 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I vượt mức 10%. Tổ II vượt mức 15%, do đó cuối tháng, cả hai tổ đã sản xuất được 560 chi tiết máy. Tính xem trong tháng đầu, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy

Câu 4: Cho hình thang cân $ABCD$ ($BC // AD$). Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O sao cho $\widehat{BOC} = 60^\circ$. Gọi I, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, OA, OB, AB, CD

a) Chứng minh tứ giác $DMNC$ nội tiếp được

b) Chứng minh tam giác MNQ là tam giác đều

c) Gọi H là trực tâm của tam giác MNQ . Chứng minh H, O, I thẳng hàng

Giải

Câu 1:

a) Điều kiện $x^2 \leq 2$ ta có: $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$

$$\Leftrightarrow 2-x^2+x^2+8+2\sqrt{(2-x^2)(x^2+8)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x^2)(x^2+8)} = 3 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 7 = 0 \quad (1)$$

Đặt $u = x^2 \geq 0$ thì (1) trở thành $u^2 + 6u - 7 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1, u_2 = -7$ (loại)

Vậy $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x + 19} + \sqrt{x^2 - 2x + 26} = -x^2 + 2x + 8$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 19} + \sqrt{x^2 - 2x + 26} + x^2 - 2x + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)^2 + (x-1)^2 + 16} + \sqrt{(x-1)^2 + 25} + (x-1)^2 = 9$$

VT $\geq 4 + 5 + 0 = 9$, VP = 9. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình (1) có 1 nghiệm $x = 1$

Câu 2:

a) Điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases}$

$$P = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a + b - \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a + b - \sqrt{ab}}$$

b) Chứng tỏ $P \geq 0$

$$\text{Ta có } P = \frac{\sqrt{ab}}{a + b - \sqrt{ab}} \geq 0 \text{ vì } a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a + b - \sqrt{ab} \geq 0$$

Câu 3: Giả sử trong tháng đầu tổ I làm được x chi tiết máy ($x > 0$, $x \in \mathbb{N}$) và tháng đầu tổ II làm được y chi tiết ($y > 0$, $y \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 500 \\ \frac{10}{100}x + \frac{15}{100}y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases}$$

Câu 4:

a) Tứ giác DMNC nội tiếp được

Do ABCD là hình thang cân nên các tam giác OAD, OBC cân tại O.

Hơn nữa $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 60^\circ$

Nên hai tam giác này là đều.

Bởi vậy các đường trung tuyến DM, CN cũng là đường cao, nghĩa là $\widehat{CMD} = \widehat{CND} = 90^\circ$. Điều này chứng tỏ M, N nằm trên đường tròn đường kính CD

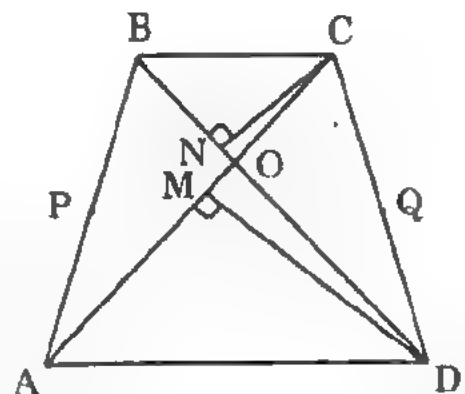
b) Tam giác MNQ đều

$$\text{Theo câu a) ta có: } MQ = NQ \left(= \frac{1}{2} CD \right)$$

Hơn nữa, MN là đường trung bình của $\triangle OAB$ nên $MN = \frac{AB}{2}$

Do $AB = CD$ nên $MQ = NQ = MN$

Suy ra $\triangle MNQ$ đều



c) Chứng minh H, O, I thẳng hàng

Ta chứng minh đường thẳng OH đi qua điểm I

Trước hết, do tam giác MNQ đều nên $\widehat{MHN} = 120^\circ = \widehat{MON}$

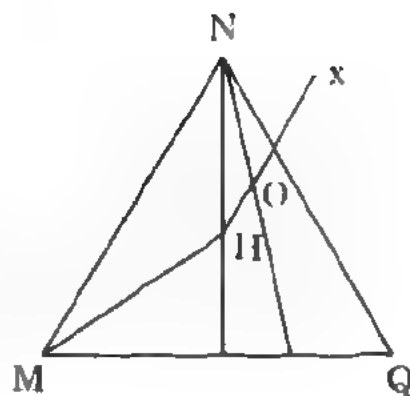
Hai điểm H, O cùng nhìn MN dưới góc 120° nên tứ giác MNOH nội tiếp được.

Khi đó gọi Ox là tia đối của OH ta có:

$\widehat{NOx} = \widehat{NMH}$ (hai góc cùng bù với \widehat{NOH})

Do $\widehat{NMH} = 30^\circ$ nên $\widehat{NOx} = 30^\circ$

Điều này chứng tỏ Ox là đường phân giác của góc BOC và do đó Ox đi qua trung điểm I của BC. Vậy H, O, I thẳng hàng.



ĐỀ 45

Câu 1: Cho Parabol (P) : $y = x^2 - 4x + 3$

a) Chứng minh đường thẳng $y = 2x - 6$ tiếp xúc với parabol (P)

b) Giải bằng đồ thị bất phương trình $x^2 - 4x + 3 > 2x - 4$

Câu 2: Cho phương trình $(2 - m)x^2 - (1 - 2m)x - m - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh phương trình (1) có nghiệm với mọi m

b) Tìm các giá trị m để phương trình (1) có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 2$

Câu 3: Hai xe lửa khởi hành ngược chiều nhau từ A và B cách nhau 650km để gặp nhau. Nếu chúng khởi hành cùng lúc thì sẽ gặp nhau sau 10giờ, nhưng nếu xe thứ hai khởi hành sớm hơn xe thứ nhất là 4giờ 20phút thì chúng sẽ gặp nhau sau 8giờ. Tính từ lúc xe thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc mỗi xe

Câu 4: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và một điểm C trên đường tròn (C không trùng với A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C kẻ tia Ox tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC, P là giao điểm của AC và BM. Tia BC cắt các tia AM, Ax lần lượt tại N, Q

a) Chứng minh tam giác ANB cân

b) Tứ giác APNQ là hình gì? Tại sao?

- c) Góc C là góc chính giữa của cung AB không chứa C . Hỏi có thể vẽ ra 3 điểm Q, M, K thẳng hàng được không? Tại sao?
- d) Xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với đường tròn (O)

Giải

Câu 1:

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và (P) .

$$x^2 - 4x + 3 = 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (1)$$

Có $\Delta = 9 - 9 = 0$ nên phương trình (1) có nghiệm kép do đó đường thẳng $y = 2x - 6$ tiếp xúc với parabol (P)

- b) $x^2 - 4x + 3 > 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 > 6x + 7$

Trên cùng 1 hệ trục Oxy vẽ $(P): y = x^2$, $(d): y = 6x + 7$

đ cắt (P) tại 2 điểm $A(-1, 1)$ và $B(7, 49)$

Từ đó, ta thấy các điểm trên trục $x'Ox$ và tung độ tương ứng trên (P) lớn hơn tung độ tương ứng trên (d) là $x < -1$ hoặc $x > 7$. Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -1 \vee x > 7$

Câu 2:

- a) $(2 - m)x^2 + (1 - 2m)x - m - 1 = 0 \quad (1)$

- Nếu $m = 2$, phương trình (1) có dạng $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Nếu $m \neq 2$, phương trình (1) là phương trình bậc hai có $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{m+1}{m-2}$

Vậy phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi m

- b) Xét hai trường hợp

- $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow 1 = \frac{2(m+1)}{m-2} \Leftrightarrow m-2 = 2m+2 \Leftrightarrow m = -4$
- $x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2} = 2 \Leftrightarrow m+1 = 2m-4 \Leftrightarrow m = 5$

Vậy $m = -4, m = 5$ thỏa mãn đề bài

- c) $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2} \neq 1 \Leftrightarrow m+1 \neq m-2 \Leftrightarrow 1 \neq -2$ luôn luôn đúng. Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi $m \neq 2$

- $x_1^2 + x_2^2 > 2 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{m+1}{m-2}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{m-2}\right)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{6m-3}{(m-2)^2} > 0$

Do đó $m \neq 2$ nên $(m-2)^2 > 0$. Vậy $6m-3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

Đáp số: với $m > \frac{1}{2}$ và $m \neq 2$ thì $x_1^2 + x_2^2 > 2$

Câu 3: Gọi x, y lần lượt là vận tốc xe thứ nhất và xe thứ hai ($x, y > 0$, đơn vị km/h)

Xe thứ nhất đi trong 8 giờ, xe thứ hai đi trong $12\frac{1}{3}$ giờ thì hai xe gặp

nhau nên: $8x + \frac{37}{3}y = 650$

Mặt khác, sau 10 giờ hai xe gặp nhau nên $10x + 10y = 650$

Vậy ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 10x + 10y = 650 \\ 8x + \frac{37}{3}y = 650 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 30 \end{cases}$$

$x = 35, y = 30$ thỏa mãn điều kiện bài toán

Vậy vận tốc xe thứ nhất là $x = 35$ km/h

Vận tốc xe thứ hai là $y = 30$ km/h

Câu 4:

a) Tam giác ABN cân

Do $AM = MC$ nên MB là phân giác của góc ABN

Đồng thời do AB là đường kính nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$

Phân giác MB cũng là đường cao nên tam giác ABN cân tại B

b) Tứ giác APNQ là hình gì?

Theo câu a) ta có $AN \perp MB$

Tương tự ta có $AC \perp BN$

Bởi vậy P là trực tâm của $\triangle ABN$ và do đó NP là đường cao thứ ba

$\Rightarrow NP \perp AB \Rightarrow NP \parallel Ax$

Vậy APNQ là hình thang

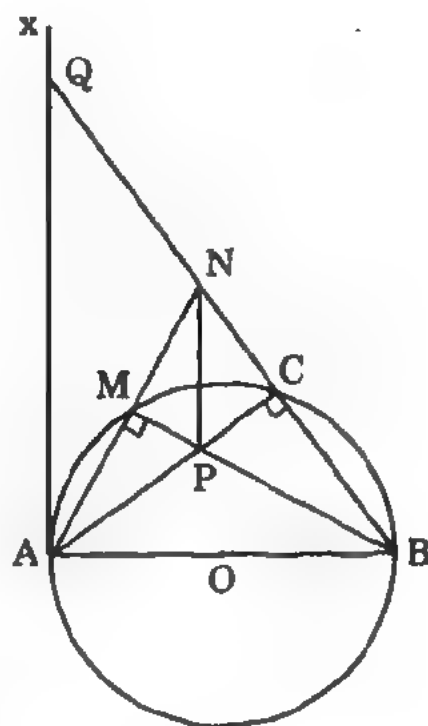
c) Ba điểm Q, M, K có thẳng hàng không?

Giả sử 3 điểm Q, M, K thẳng hàng. Khi đó

$$\widehat{AQK} = \frac{1}{2}(\text{Sđ } \widehat{AK} - \text{Sđ } \widehat{AM}) = \frac{1}{2}(\text{Sđ } \widehat{BK} - \text{Sđ } \widehat{MC}) = \widehat{KQB}$$

Xét tam giác ABQ có QM và BM là 2 đường phân giác

Vậy AM là phân giác góc QAB, tức là điểm giữa của cung AB. Điều này không xảy ra. Do đó ba điểm Q, M, K không thẳng hàng



ĐỀ 46

Câu 1: Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$B = \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} \right) : \frac{4y^2}{x^2+y^2-2xy} \right] \cdot \frac{x+y}{x-y}$$

Với $x = 2; y = 0,01$

Câu 2:

1) Giải các phương trình

a) $|x-1| + 3|x-4| = 7$ với $1 < x < 4$

b) $|x-2| - 3x = 5$

2) Với giá trị nào của x thì

a) $A = 2x^2 - 20x + 81$ có giá trị nhỏ nhất?

b) $B = -5x^2 + \frac{10}{7}x - 1$ có giá trị lớn nhất?

Câu 3: Một đội thuyền đánh cá, dự định mỗi ngày bắt được 30 tấn cá.

Đội đã đánh bắt được 40 tấn cá mỗi ngày, nên đã hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 3 ngày, ngoài ra còn đánh bắt thêm được 20 tấn cá nữa. Tính số tấn cá phải đánh bắt theo kế hoạch

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp trong đường tròn đường kính AD.

Từ điểm M bất kỳ trên cung nhỏ AC kẻ tia BM trên lấy điểm E sao cho $ME = MC$ (E ở ngoài đoạn BM)

a) Chứng minh $MD \parallel EC$

b) AM kéo dài cắt CE tại P, chứng minh P là trung điểm của CE

c) Chứng minh đường tròn tâm A, bán kính AE đi qua B và C

d) Chứng minh $MB + MC < AB + AC$

Giải

Câu 1:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} \right) : \frac{4y^2}{x^2+y^2-2xy} \right] \cdot \frac{x+y}{x-y} \\ &= \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)} \right) : \frac{4y^2}{(x-y)^2} \right] \cdot \frac{x+y}{x-y} \\ &= \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x-y)} \right) : \frac{4y^2}{(x-y)^2} \right] \cdot \frac{x+y}{x-y} = \left[\frac{2x+2y-2x}{x+y} \cdot \frac{x-y}{4y^2} \right] \cdot \frac{x+y}{x-y} \end{aligned}$$

$$B = \frac{x-y}{2y(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2y} \quad (\text{với } x \neq \pm y, y \neq 0)$$

$$\text{Khi } x = 2, y = 0,01 \text{ thì } B = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2(0,01)} = 50$$

Câu 2:

1.a) Giải phương trình $|x-1| + 3|x-4| = 7$ với $1 < x < 4$

- Với $1 < x < 4$ thì $x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$; $x-4 < 0 \Rightarrow |x-4| = -x+4$

$$\text{Nên phương trình } |x-1| + 3|x-4| = 7 \Leftrightarrow x-1 + 3(-x+4) = 7 \Leftrightarrow x = 2$$

Thỏa điều kiện $1 < x < 4$. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 2$

b) $|x-2| - 3x = 5 \quad (1)$

- Nếu $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$$(1) \Leftrightarrow x-2-3x=5 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ thỏa điều kiện } x \geq 2$$

- Nếu $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$(1) \Leftrightarrow -x+2-3x=5 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \text{ thỏa điều kiện } x < 2$$

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x = 2$ và $x = -\frac{3}{4}$

$$2) A = 2x^2 - 20x + 81 = 2x^2 - 20x + 50 + 31$$

$$A = 2(x^2 - 10x + 25) + 31$$

$$A = 2(x-5)^2 + 31 \geq 31$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 31 xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$

$$B = -5x^2 + \frac{10}{7}x - 1 = -5\left(x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{49}\right) - \frac{44}{49}$$

$$B = -5\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{44}{49}. \text{ Biết rằng } \left(x - \frac{1}{7}\right)^2 \geq 0 \text{ nên } B \text{ nhỏ nhất là } -\frac{44}{49}$$

$$\text{xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$$

Câu 3: Gọi số tấn cá dự định đánh bắt theo kế hoạch là x tấn ($x > 0$). Do đó số tấn cá đã đánh bắt được là $(x+20)$ tấn. Dự định mỗi ngày đánh bắt 30 tấn thì số ngày dự định đánh bắt cá là $\frac{x}{30}$ ngày

Nhưng mỗi ngày đánh bắt được 40 tấn nên số ngày đã đánh bắt là $\frac{x+20}{40}$ ngày

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{x}{30} - \frac{x+20}{40} = 3 \Rightarrow x = 420$$

Vậy số tấn cá dự định đánh bắt theo kế hoạch là 420 tấn

Câu 1:

a) Do $\triangle ABC$ cân nên đường kính

$AD \perp BC$ và D là trung điểm của cung nhỏ BC

Do đó $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

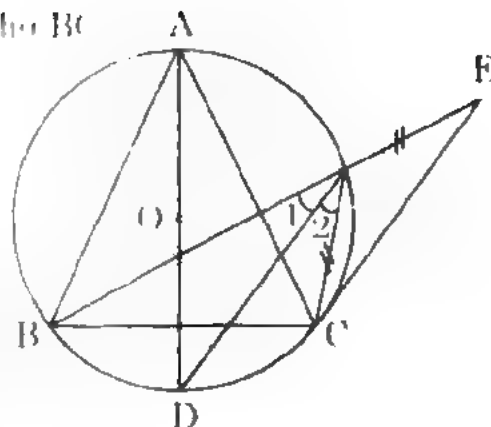
Mặt khác $\triangle MCE$ cân (vì $MC = ME$)

Nên $\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MEC}$

Ta có $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{MCE} + \widehat{MEC}$

(vì \widehat{BMC} là góc ngoài tại M của $\triangle MCE$)

Suy ra $2\widehat{M}_2 = 2\widehat{MCE}$ hay $\widehat{M}_2 = \widehat{MEC}$ và
vị trí số lẻ trùng. Do đó $MD \parallel EC$



b) $\triangle AMD$ vuông tại M vì trung tuyến $MO = \frac{1}{2}AD$. Do đó $AM \perp MD$ suy

ra $AM \perp CE$. Như vậy MP là đường cao cũng là trung trực của $\triangle MCE$
cần suy ra P là trung điểm của CE .

c) Do AP là trung trực của CE nên $AC = AE$ và $AC = AB$ (giả thiết)

Suy ra $AB = AC = AE$ tức là đường tròn tâm A bán kính AE đi qua B
và C .

d) Xét $\triangle ABE$ ta có $BE < AB + AE$ mà $BE = MB + ME = MB + MC$ và
 $AB + AE = AB + AC$. Vậy $MB + MC < AB + AC$

ĐỀ THI VÀO PT NĂNG KHIẾU QG TPHCM BAN C, D (2004 – 2005)

Câu 1:

a) Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 + 2mx - m + 2$ tiếp xúc với đường
thẳng $(d): y = x + m$

b) Giả sử phương trình: $mx^2 + (2m + 1)x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm
phân biệt x_1, x_2 . Hãy tính tổng S và tích P của các nghiệm, tìm một
hệ thức liên hệ giữa S và P độc lập với m

Câu 2:

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 21 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $20 - \sqrt{3} - 2x = 2x - 3$

Câu 3:

a) Tìm k để đa thức $f(x) = x^4 - 22x^3 + 51x^2 + 2k$ chia hết cho đa thức
 $g(x) = x^2 - 3x$ (nghĩa là có đa thức $h(x)$ sao cho $f(x) = h(x).g(x)$)

Giải phương trình $f(x) = 0$ với k vừa tìm được

b) Rút gọn biểu thức: $R = \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \frac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông ở đỉnh A và $\widehat{ABC} = 75^\circ$. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng BC, AC và AB lần lượt tại các điểm M, N và P

a) Tính $\frac{AN}{AC}$

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BN và PC. So sánh MA và MI

c) Lấy điểm Q trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B sao cho $BQ = BI$; hạ QJ vuông góc với PC, J nằm trên PC. Tính $\frac{QJ}{AB}$

Câu 5: Hai thành phố A và B cách nhau 48km, gió thổi từ A đến B với vận tốc không đổi 6km/h. Lúc 8giờ, một người đi mô tô từ A đến B, nghỉ ngơi 30 phút rồi trở lại A, anh về đến A lúc 10giờ 50 phút. Vận tốc của mô tô được cộng thêm hoặc trừ bớt vận tốc của gió, tùy theo mô tô chạy xuôi chiều gió hoặc ngược chiều gió. Hãy tính tốc độ riêng của mô tô (tốc độ của mô tô khi tốc độ gió bằng 0)

Giải

Câu 1:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 + (2m - 1)x - 2m + 2 = 0 \quad (*)$$

(P) tiếp xúc (d) khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 4m - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}; \quad m = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

b) Theo định lí Viét, ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{(2m+1)}{m} & (1) \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2-1}{m} & (2) \end{cases}$$

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của (*)

Từ (1), ta có: $m = \frac{1}{S+2}$, thay vào (2), ta được: $P = \frac{S^2 + 4S + 3}{S+2}$

Vậy hệ thức liên hệ giữa S và P không phụ thuộc vào m là:

$$P = \frac{S^2 + 4S + 3}{S+2}$$

Câu 2:

$$a) \begin{cases} x + y = -1 \\ x^3 + y^3 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -\frac{20}{3} \end{cases}$$

Theo định lý Viet đảo, ta có x, y là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 + X - \frac{20}{3} = 0 \Leftrightarrow 3X^2 + 3X - 20 = 0$$

Giải phương trình trên ta có hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là:

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{249}}{6}; \frac{-3 - \sqrt{249}}{6} \right); \left(\frac{-3 - \sqrt{249}}{6}; \frac{-3 + \sqrt{249}}{6} \right)$$

$$b) 20 - \sqrt{3 - 2x} = |2x - 3| \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } 3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow 20 - \sqrt{3 - 2x} = 3 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2x} = 17 + 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 + 2x \geq 0 \\ 3 - 2x = (17 + 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{17}{2} \\ 2x^2 + 35x + 143 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{13}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của (1) là } x = -\frac{13}{2}$$

Câu 3:

a) Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $g(x)$ ta được:

$$x^4 - 22x^2 + 51x + 2k = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 15) + (30 + 2k)$$

$f(x)$ chia hết cho $g(x)$ khi và chỉ khi $30 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -15$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hai phương trình trên, ta được: } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{69}}{2}; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{69}}{2};$$

$$x_3 = 1; x_4 = 2$$

$$\begin{aligned} b) R &= \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \frac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2} \\ &= \frac{3a^2 - 3ab + ab - b^2}{2a^2 - ab + 2ab - b^2} : \frac{3a^2 - 3ab - ab + b^2}{3a^2 - ab + 3ab - b^2} \\ &= \frac{(a - b)(3a + b)}{(2a - b)(a + b)} : \frac{(a - b)(3a - b)}{(3a - b)(a + b)} = \frac{3a + b}{2a - b} \end{aligned}$$

Câu 4:

a) Theo giả thiết ta có:

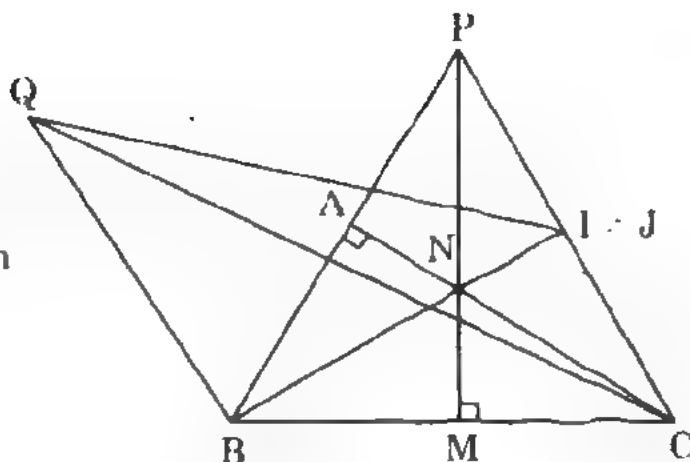
$$\widehat{NBC} = \widehat{NCB} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{ABN} = 60^\circ$$

Nên tam giác ABN là nửa tam giác đều

$$\rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AN}{BN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{vì } NC = BN)$$



b) Vì N là trực tâm của $\triangle PBC$ nên $BI \perp PC$. Do đó A, I thuộc đường tròn đường kính BC

Mặt khác M là trung điểm BC. Do đó $MA = MI$

c) Ta có: $QP \perp mp(ABC)$ suy ra $QB \perp PC$, mặt khác $QJ \perp PC$ nên $PC \perp mp(QBJ)$

Do đó $PC \perp BJ$ suy ra $I \equiv J$

Tam giác BQI vuông cân tại B nên ta có: $QI = BI \cdot \sqrt{2} = AC \cdot \sqrt{2}$

Ngoài ra: $AN + NC = AC$, nên $AB \cdot \sqrt{3} + 2AB = AC$ hay $(2 + \sqrt{3})AB = AC$

$$\text{Do đó } \frac{QJ}{AB} = \frac{QI}{AB} = \frac{AC \cdot \sqrt{2}}{AB} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})AB}{AB} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

Câu 5:

Gọi tốc độ riêng của mô tô là x (km/h) ($x > 6$)

Vận tốc của mô tô đi từ A đến B là: $x + 6$ (km/h)

Vận tốc của mô tô đi từ B về A là: $x - 6$ (km/h)

Thời gian người đó đi từ A đến B, từ B về A và nghỉ ngơi là:

$$10 \text{ giờ } 50 \text{ phút} - (8 \text{ giờ } + 30 \text{ phút}) = 2 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = \frac{7}{3} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Thời gian người đó đi từ A đến B là: } \frac{48}{x+6} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Thời gian người đó đi từ B về A là: } \frac{48}{x-6} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Theo đề bài ta có phương trình: } \frac{48}{x+6} + \frac{48}{x-6} = \frac{7}{3}$$

Giải phương trình trên ta được $x = 42$

Vậy vận tốc của mô tô là 42 (km/h)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHU VĂN AN VÀ AMSTERDAM (2005 – 2006)

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x}} + \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$. Điều kiện: $x \neq 1$ và $x > 0$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tìm x để $P = \frac{9}{2}$

Câu 2: Cho bất phương trình: $3m - 1 \leq x + 1 \leq 2m + x$ (m là tham số)

- 1) Giải bất phương trình với $m = 1 - 2\sqrt{2}$
- 2) Tìm m để bất phương trình nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm

Câu 3: Trong một phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): 2x - y - a^2 = 0$ và parabol $(P): y = ax^2$ (a là tham số dương)

- 1) Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B . Chứng minh rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung
- 2) Gọi x_A và x_B là hoành độ của A và B , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A - x_B}$

Câu 4: Đường tròn tâm O có dây cung AB cố định và điểm I là điểm chính giữa của cung lớn AB . Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB , dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt tia BM tại C

- 1) Chứng minh các tam giác AIB và AMC là tam giác cân
- 2) Khi điểm M di động, chứng minh rằng điểm C di chuyển trên một cung tròn cố định
- 3) Xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác AMC đạt giá trị lớn nhất

Câu 5: Cho tam giác ABC trong đó A có $AB = AC$ và trung tuyến AM . $\widehat{ACF} = \alpha$, $\widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh rằng: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \beta$

Giải

Câu 1:

$$P = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x}} + \frac{x + 1}{\sqrt{x}} \quad \text{Điều kiện: } x \neq 1 \text{ và } x > 0$$

$$1) \text{ Ta có } P = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} + \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x + \sqrt{x} + 1 - x + \sqrt{x} - 1 + x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$$

$$2) P = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4; x = \frac{1}{4}$$

Câu 2:

$$3(m - 1)x + 1 > 2m + x \quad (*)$$

$$1) \text{ Với } m = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (*) \text{ có dạng: } -(6\sqrt{2} + 1)x > 1 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x < \frac{4\sqrt{2} - 2}{6\sqrt{2} + 1}$$

$$2) (*) \Leftrightarrow (3m - 4)x + (1 - 2m) > 0 \quad (**)$$

Xét hàm số $f(x) = (3m - 4)x + (1 - 2m)$. Đồ thị hàm số này là một đường thẳng nên để $(**)$ đúng với mọi $x > 1$ thì ta phải có:

$$\begin{cases} 3m - 4 > 0 \\ f(1) = m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$$

Vậy với mọi $m \geq 3$ thì bất phương trình đã cho nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm

Câu 3:

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$ax^2 - 2x + a^2 = 0 \quad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt \Leftrightarrow

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = 1 - a^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Khi đó nếu ta gọi u, v lần lượt là hoành độ của A và B thì theo định lý

$$\text{Viết cho (1) ta có: } \begin{cases} u + v = \frac{2}{a} > 0 \\ u \cdot v = a > 0 \end{cases}$$

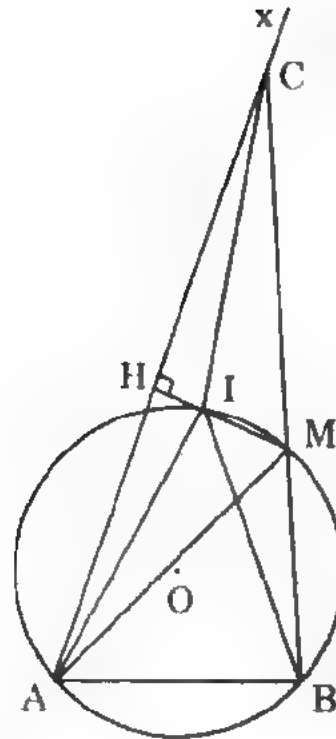
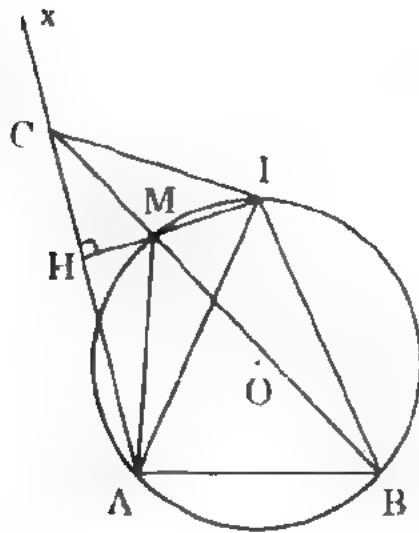
Vậy A, B nằm về bên phải trục tung

$$2) \text{ Theo câu 1), ta có: } T = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra khi và chỉ khi } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } T \text{ là } 2\sqrt{2} \text{ đạt được } \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 4:



- 1) Theo giả thiết thì I là điểm chính giữa cung lớn AB nên $IA = IB$
Do đó $\triangle AIB$ cân tại I

- Trường hợp M thuộc cung IA thì $\widehat{CMH} = \widehat{IMB}$ (1)

$$\text{Mặt khác } Sđ \widehat{AMH} = \frac{1}{2} (Sđ \widehat{AM} + Sđ \widehat{MI}) = \frac{1}{2} Sđ \widehat{IA} = \frac{1}{2} Sđ \widehat{IB} = \frac{1}{2} Sđ \widehat{IMB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{AMH}$

Tam giác AMC có MH vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên $\triangle AMC$ cân tại M

- Trường hợp M nằm trên cung IB, chứng minh tương tự ta cũng được $\triangle AMC$ cân tại M

- 2) Theo câu 1) thì $IA = IC$, mà IA nằm trên đường tròn tâm I bán kính IA. Khi $M \equiv A$ thì $C = A$, khi $M \equiv B$ thì $C \equiv C_1$ (trong đó C_1 là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính IA với đường thẳng qua A vuông góc góc IB)

Do đó khi M di chuyển trên cung lớn AB thì điểm C chuyển động trên cung AC

- 3) Giả sử rằng C_0 là giao điểm của AI với đường tròn tâm I bán kính IA, còn M_0 là điểm đối xứng của A qua O

Nhận xét rằng khi tia Ax trùng với tia AI thì M trùng với M_0 , khi đó ta có B, M_0 , C_0 thẳng hàng

Từ mối liên hệ giữa dây cung và đường kính, ta có $AM \leq AM_0, AC \leq AC_0$

Gọi p là chu vi. Ta có: $p(AMC) \leq p(AM_0C_0)$

Vậy giá trị lớn nhất của p (AMC) là p (AM_0C_0), đạt được khi và chỉ khi M là điểm xuyên tâm đối của A đối với đường tròn (O)

Câu 5:

Dựng AH vuông góc BC do $AB < AC$

Nên H thuộc đoạn BM

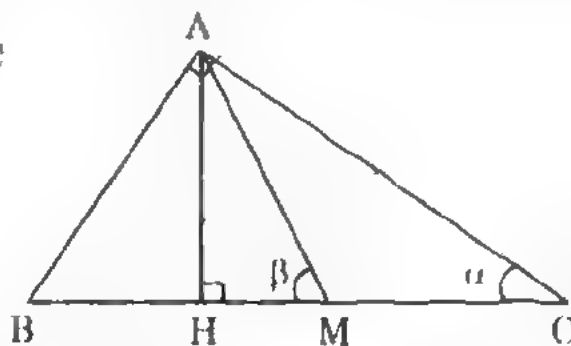
Khi đó ta có

$$AH = AM \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} BC \cdot \sin \beta \quad (1)$$

Mặt khác

$$AH = AC \cdot \sin \alpha = BC \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow 1 + \sin \beta = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$



ĐỀ THI VÀO LỚP 10 BAN (A, B) LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Câu 1:

Cho phương trình (có ẩn số là x): $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

a) Chứng tỏ rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

b) Tìm m để tích của hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 2: Giải các phương trình và hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$$

b)
$$x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$$

Câu 3:

a) Cho $a > c, b > c, c > 0$. Chứng minh: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

b) Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh: $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt[3]{ab}$

Câu 4: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng khi tăng thêm mỗi chữ số một đơn vị thì số mới được tạo thành cũng là một số chính phương

Câu 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, số đo góc C bằng 45° . Đường tròn đường kính AB cắt cạnh AC và BC lần lượt tại M và N

a) Chứng minh MN vuông góc với OC

b) Chứng minh $MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$

Câu 6: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn a, b, c nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Điểm M di động trên cung nhỏ BC . Từ M kẻ các đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC . H thuộc đường thẳng AB , K thuộc đường thẳng AC .

- Chứng minh hai tam giác MBC và MHK đồng dạng với nhau
- Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất

Giải

Câu 1: $-4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (*)$

a) Ta có: $\Delta = (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 1 > 0$

Vậy $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m

b) Theo định lý Viet: $x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{-4} = \frac{1}{4} \left(m - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra } \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1 x_2$ là $\left(-\frac{1}{16} \right)$ đạt được khi $m = \frac{3}{2}$

Câu 2:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4xy + 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$

(Giải ra ta được hệ có nghiệm $(x; y)$ là: $(4; 2); (2; 4)$)

$$\text{b) } x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11 \quad (1)$$

Điều kiện: $x \neq -5$. Khi đó (1) có dạng:

$$\left(x - \frac{5x}{x+5} \right)^2 + 10 \left(\frac{x^2}{x+5} \right) = 11 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5} \right)^2 + 10 \left(\frac{x^2}{x+5} \right) = 11$$

$$\text{Đặt } y = \frac{x^2}{x+5} \quad (2)$$

Phương trình trên trở thành: $y^2 + 10y - 11 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = -11$

Với $y_2 = -11$, thay vào (2) thấy phương trình theo ẩn x vô nghiệm

Với $y_1 = 1$, từ (2) ta có phương trình $x^2 - x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

Thử lại ta thấy $x_1 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình đã cho

Câu 3:

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương:

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{c}{b} \left(\frac{a-c}{a} \right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(\frac{b-c}{b} \right)}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) = 1 \rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{bc}{b-c} = a$

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$$

Câu 4: Gọi số chính phương có bốn chữ số cần tìm là \overline{abcd} ($a \neq 0$)

Đặt $n^2 = \overline{abcd}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Ta có $n^2 < 10000 \Rightarrow n < 100$

Khi tăng mỗi chữ số \overline{abcd} lên một đơn vị thì ta được số:

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

Theo giả thiết ta có $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

Tương tự ta có $m < 100 \Rightarrow 2 \leq m + n < 200$

$$\text{Xét } m^2 - n^2 = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1) - \overline{abcd} = 1111$$

$$\Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 1111$$

Vì $1111 = 1 \times 1111 = 11 \cdot 101$, nên chỉ xảy ra khi $m-n=11$ và

$$m+n=101 \Rightarrow m=56, n=45. \text{ Vậy } \overline{abcd} = 45^2 = 2025$$

thử lại số cần tìm là 2025

Câu 5:

a) Dựng tiếp tuyến Cx với đường tròn (O)

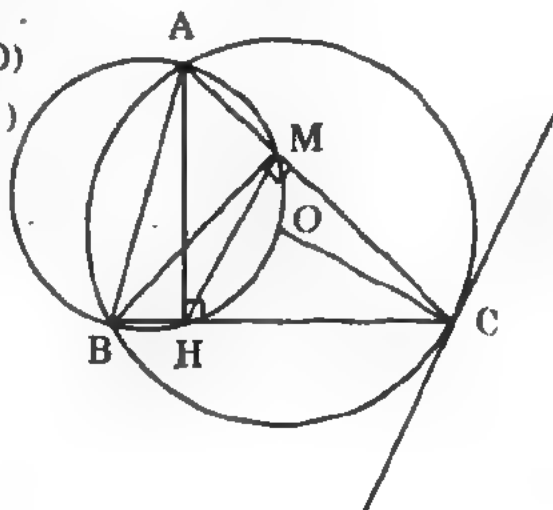
khi đó $\widehat{BAC} = \widehat{BCx}$ (vì cùng chắn \widehat{BC})

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{MNC}$

(vì cùng bù với \widehat{MNB})

Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{BCx}$, từ đó $MN \parallel Cx$

Ta lại có $Cx \perp OC$ nên $MN \perp OC$



b) Dễ thấy $\triangle CMN \sim \triangle CBA$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (vì } \triangle CAN \text{ cân tại N)}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

Câu 6:

a) Vì bốn điểm A, H, M, K cùng nằm trên đường tròn đường kính AM nên

ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{MHK}$;

$$\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKH}$$

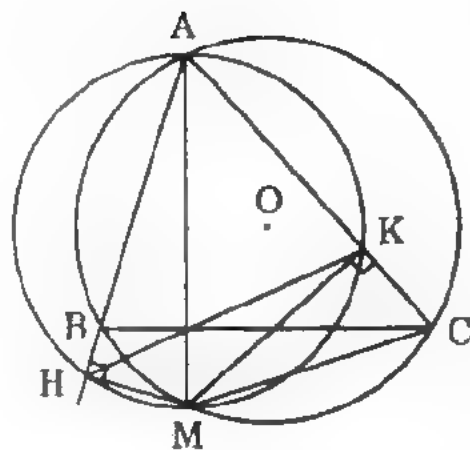
$$\Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MHK$$

b) Vì $\triangle MBC \sim \triangle MHK$ (câu a))

$$\Rightarrow \frac{BC}{HK} = \frac{MB}{MH} \text{ mà } MB \geq MH \Rightarrow \frac{BC}{KH} \geq 1$$

$\Rightarrow HK \leq BC$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi H = B, khi đó $\widehat{APM} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow AM$ là đường kính của đường tròn (O). Do đó điểm M là điểm đối xứng của A qua O thì độ dài HK lớn nhất



ĐỀ THI LỚP 10 TỈNH THÁI BÌNH (2005 – 2006)

Câu 1:

1) Thực hiện phép tính: $\sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

2) Giải phương trình: $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Câu 2: Cho hàm số: $y = (2m - 3)x + n - 4$ (d) $\left(m \neq \frac{3}{2}\right)$

1) Tìm giá trị của m và n để đường thẳng (d):

a) Đi qua hai điểm A(1; 2), B(3; 4)

b) Cắt trục hoành tại điểm có tung độ $y = 3\sqrt{2} - 1$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2}$

2) Cho $n = 0$, tìm m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') có phương trình: $x - y + 2 = 0$ tại điểm M(x; y) sao cho biểu thức:

$$P = y^2 - 2x^2 \text{ đạt giá trị lớn nhất}$$

Câu 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $720m^2$, nếu tăng chiều dài mảnh vườn thêm 6m và giảm chiều rộng đi 4m thì diện tích của mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước mảnh vườn

Câu 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến Ax và By . Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D .

- 1) Chứng minh: a) $CD = AC + BD$ b) $AC \cdot BD = R^2$
- 2) Xác định vị trí điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích nhỏ nhất
- 3) Cho biết $R = 2\text{cm}$, diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 32cm^2 . Tính diện tích tam giác ABM

Câu 5: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$

Chứng minh rằng: $\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}$

Giải

Câu 1:

- 1) $\sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = 2$
- 2) Đặt $y = x^2, y \geq 0$. Phương trình đã cho có dạng: $y^2 + 5y - 36 = 0$
 $\Leftrightarrow y_1 = 4$ và $y_2 = -9$ (loại). Với $y_1 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
 Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2; x = -2$

Câu 2: (d) : $y = (2m - 3)x + n - 4$

- 1.a) (d) đi qua $A(1; 2)$ và $B(3; 4)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m - 3 + n - 4 = 0 \\ 3(2m - 3) + n - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 9 \\ 6m + n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ m = 2 \end{cases}$$

- b) (d) đi qua $(0; 3\sqrt{2} - 1)$, nên ta có: $n - 4 = 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow n = 3 + 3\sqrt{2}$

(d) đi qua $(1 + \sqrt{2}; 0)$, nên ta có: $(2m - 3)(1 + \sqrt{2}) + n - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sqrt{2})m - 3 - 3\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2} - 2$$

Vậy $m = 2\sqrt{2} - 2; n = 3 + 3\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán

- 2) Với $n = 0$, ta có (d) : $y = (2m - 3)x - 4$

(d) cắt (d') tại $M(x; y)$ nên tọa độ của M thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y = (2m - 3)x - 4 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{m - 2} \\ y = \frac{2m - 2}{m - 2} \end{cases} \quad (m \neq -2)$$

$$P = \sqrt{2} - 2x^2 = \left(\frac{2m - 1}{m - 2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{m - 2}\right)^2 = \frac{4m^2 - 4m - 17}{m^2 - 4m + 4}$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4m + 4)P = 4m^2 - 4m - 17$$

$$(P - 4)m^2 - 4(P - 1)m + 4P + 17 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Với } p = 4 \Leftrightarrow m = \frac{11}{4}$$

$$\text{Với } P \neq 4, (*) \text{ có nghiệm khi và chỉ khi } \Delta = 72 - 9P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq 8$$

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị lớn nhất là } 8 \text{ khi } m = \frac{7}{2}$$

Câu 3: Gọi x (m) ($x > 0$) là chiều dài mảnh vườn, thì $\frac{720}{x}$ (m) là chiều rộng của mảnh vườn

$$\text{Theo đề bài, ta có phương trình: } (x + 6) \left(\frac{720}{x} - 4 \right) = 720$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 1080 = 0 \Leftrightarrow x = 30; x = -33 \text{ (loại)}$$

Vậy kích thước mảnh vườn là: 30m \times 24m

Câu 4:

1.a) Ta có: $CD = CM + DM$;

$CM = MA$; $DM = DB$ (tính chất tiếp tuyến)

Suy ra: $CD = AC + BD$

b) Ta có: $\widehat{COI} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc có cạnh C tương ứng vuông góc)

$OM \perp CD$ (giả thiết)

Suy ra: $AC \cdot BD = CM \cdot DM = OM^2 = R^2$

2) Để thấy ABCD là hình thang vuông

$$\text{nên: } 2S_{ABCD} = AB(AC + BD) = 2R \cdot CD \Rightarrow S_{ABCD} = R \cdot CD \geq R \cdot AB = 2R^2$$

Vậy ABCD có diện tích nhỏ nhất là $2R^2$, đạt được $\Leftrightarrow AB = CD$, khi đó M là điểm chính giữa cung AB của nửa đường tròn (O) đường kính AB

3) Theo câu 2) ta có: $CD = \frac{32}{2} = 16(\text{cm})$

$$\text{Do đó } 2S_{COM} = OM \cdot CD = 2 \cdot 16 = 32 \text{ cm}^2 \Rightarrow S_{COM} = 16 \text{ cm}^2$$

Để thấy $\triangle ABM \sim \triangle COD$, nên:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{COD}} = \frac{AB^2}{CD^2} \Rightarrow S_{ABM} = 16 \cdot \frac{AB^2}{CD^2} = 16 \cdot \frac{4^2}{16^2} = 1 \text{ cm}^2$$

Câu 5:

$$\text{Ta có: } 4(2x^2 + xy + 2y^2) = 5(x + y)^2 + 3(x - y)^2 \geq 5(x + y)^2$$

$$\text{Vì } x, y > 0, \text{ nên ta suy ra được: } \sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} (x + y)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} (y + z), \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} (z + x)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về ta được:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x + y + z)$$

Do $x + y + z = 1$ suy ra:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5} \quad (\text{đpcm})$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG PTTH QUỐC HỌC HUẾ (2004 – 2005)

Câu 1: Cho biểu thức: $A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}$

- 1) Tìm điều kiện đối với a, b để biểu thức A được xác định
- 2) Rút gọn biểu thức A

Câu 2:

- 1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$$
- 2) Giải bất phương trình: $x + |x - 1| > 5$

Câu 3: Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + 2mx + n = 0$ có nghiệm thì phương trình: $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ cũng có nghiệm (m, n, k là các tham số, $k \neq 0$)

Câu 4: Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P)

- 1) Tìm a, b biết rằng (D) đi qua $A(-1; 3)$ và $B(2; 0)$
- 2) Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P)

Câu 5: Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O . Hai đường cao AI và BE cắt nhau tại H

- 1) Chứng minh $\widehat{CHI} = \widehat{CBA}$
- 2) Chứng minh $EI \perp CO$
- 3) Cho $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Chứng minh $CH = CO$

Giải

Câu 1:

- 1) Điều kiện đối với a, b để A được xác định là: $ab \geq 0$ và $a \neq 0$
 2) • Với $ab \geq 0$ và $a > 0$ thì:

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{\sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab}}{a} - \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{\sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a^2}}{a} = 1$$

- Với $ab \geq 0$ và $a < 0$ thì:

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{\sqrt{a^2}}{|a|} = \frac{\sqrt{ab}}{a} - \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{2\sqrt{ab}}{a} = \frac{a}{a} = \frac{-2\sqrt{ab}}{a} = 1$$

Câu 2:

$$1) \begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 = 1 \\ x^2 + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{5}\right)$ và $\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{5}\right)$

$$2) x + |x - 1| > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x + 1 - x > 5 \\ x \geq 1 \\ x + x - 1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Câu 3:

Phương trình: $x^2 + 2mx + n = 0$ có nghiệm khi $\Delta' = m^2 - n \geq 0$

Phương trình: $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ (*) có:

$$\Delta' = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 \cdot n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 (m^2 - n) \geq 0$$

Vậy phương trình (*) cũng có nghiệm

Câu 4:

- 1) Vì đường thẳng (D) đi qua hai nghiệm A(-1; 3) và B(2; 0) nên:

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

- 2) Phương trình hoành độ của (P) và (D): $kx^2 = -x + 2$

$$\Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0 \quad (*) \quad (\text{với } k \neq 0)$$

(D) tiếp xúc (P) khi (*) có nghiệm kép

$$\text{hay } \Delta = 0 \Leftrightarrow 1+8k=0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$$

Câu 5:

1) Nối CH cắt AB tại F

Do H là trực tâm của tam giác ABC
nên $CF \perp AB$

nên ta có \widehat{CHI} vuông và

$$\widehat{HCI} = 90^\circ - \widehat{FBC} = \widehat{CBA}$$

2) Kẻ đường kính CD của đường tròn (O), ta có:

$$\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \widehat{ABE} = \widehat{FCE} = \widehat{AIE}$$

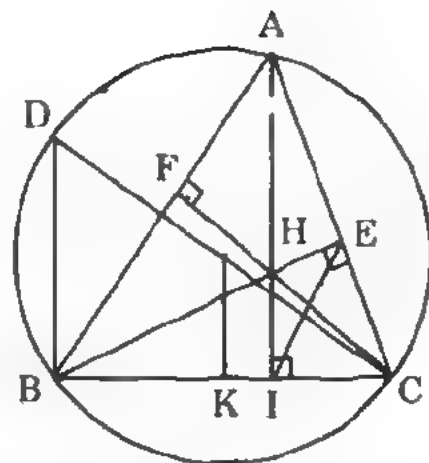
Vì $\widehat{AIE} + \widehat{EIC} = 90^\circ$, nên $\widehat{BCD} + \widehat{EIC} = 90^\circ$, tức là $EI \perp CO$ (đpcm)

3) Ta có: $\widehat{CHE} = \widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ nên hai tam giác vuông CHE và CDB đồng dạng, do đó

$$\frac{CH}{CD} = \frac{CE}{CB} \quad (*)$$

Theo giả thiết thì $\widehat{ACB} = 90^\circ$, nên $\widehat{EBC} = 30^\circ$ và $CE = \frac{1}{2}CB$

Từ (*), ta có: $\frac{CH}{CD} = \frac{1}{2}$, nên $CH = CO$



ĐỀ THI LỚP 10 TỈNH HÀ NAM (2005 – 2006)

Câu 1:

1) Giải các phương trình: a) $2x^2 - 3x - 9 = 0$; b)

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - x - 6} - 1 = 0$$

2) Rút gọn các biểu thức:

$$\text{a) } P = \frac{\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}} \quad \text{b) } Q = \sqrt{x+1+2\sqrt{x}} - \sqrt{x+1-\sqrt{4x}} \quad (\text{với } x \geq 0)$$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm A(5; 1), B(-1; 4), C(3;2)

1) Vẽ tam giác ABC

2) Viết phương trình đường thẳng BC

3) Không dùng dữ kiện, hãy xác định tọa độ của D với D là giao điểm của đường thẳng qua A song song với B và đường thẳng qua B song song với Oy.

Câu 3: Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ A kẻ đường thẳng (đường không đi qua tâm O) cắt $(O; R)$ tại B và C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến với $(O; R)$ tại B và C cắt nhau tại D. Từ D kẻ DH vuông góc với AO (H nằm trên AO) cắt cung nhỏ BC tại M. Gọi E là giao điểm của DO và BC.

- 1) Chứng minh DHOC là tứ giác nội tiếp
- 2) Chứng minh $OH.OA = OE.OD$
- 3) Chứng minh AM là tiếp tuyến với $(O; R)$

Câu 4: Với x thỏa mãn $2(x-1) = \sqrt{2(x^2+x+1)}$, tính giá trị biểu thức

$$T = \frac{-2x^3 + 13x^2 - 19x + 1}{2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 17x - 2}$$

Giải

Câu 1:

1) Giải phương trình:

a) $2x^2 - 3x - 9 = 0$ có $\Delta = 9 + 72 = 81 = 9^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$

Do đó phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -\frac{3}{2}; x_2 = \frac{3+9}{4} = 3$

b) Điều kiện: $x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2; x \neq 3$

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - x - 6} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 4x - 4 - (x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 6} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Có $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

Do đó $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -2$

2.a) $P = \frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})}{9-8} - \frac{6-\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} = -4$

b) $Q = \sqrt{x+1+2\sqrt{x}} - \sqrt{x+1-4\sqrt{x}} = \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{x})^2} - \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x+1} + |\sqrt{x}-1|$

Nếu $x \geq 1$ thì $Q = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} - 1 = 2$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì $Q = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x}$

Câu 2:

1) Vẽ tam giác ABC

2) Phương trình đường thẳng BC có dạng: $y = ax + b$ Điểm B thuộc đường thẳng BC nên: $4 = -a + b$ (1)Điểm C thuộc đường thẳng BC nên: $2 = 3a + b$ (2)Giải hệ (1) và (2) ta được: $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{7}{2}$ Vậy phương trình đường thẳng BC là $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

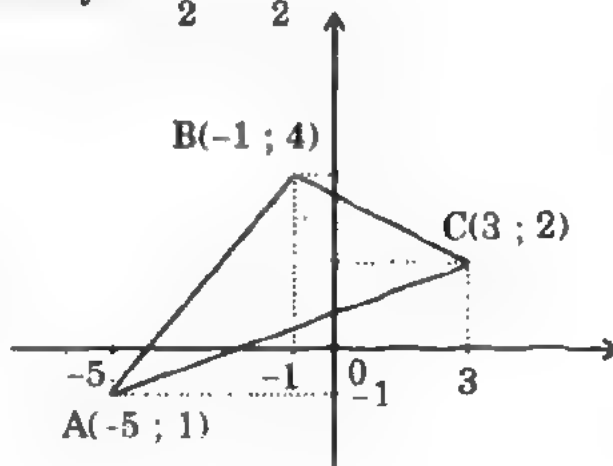
3) Đường thẳng song song với BC

có dạng: $y = -\frac{1}{2}x + b$

Vì đường thẳng này qua A

nên $-5 = -\frac{1}{2}(-1) + b \Rightarrow b = -\frac{7}{2}$ Đường thẳng qua B song song với trục Oy là: $x = -1$ Giải hệ $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1; y = -3$

Vậy D(-1; -3)

**Câu 3:**

1) Vì DC là tiếp tuyến của đường tròn

(O; R) nên $\widehat{DCO} = 90^\circ$ Cũng theo giả thiết $DH \perp AO$ nên $\widehat{DHO} = 90^\circ$

Tứ giác DHOC có

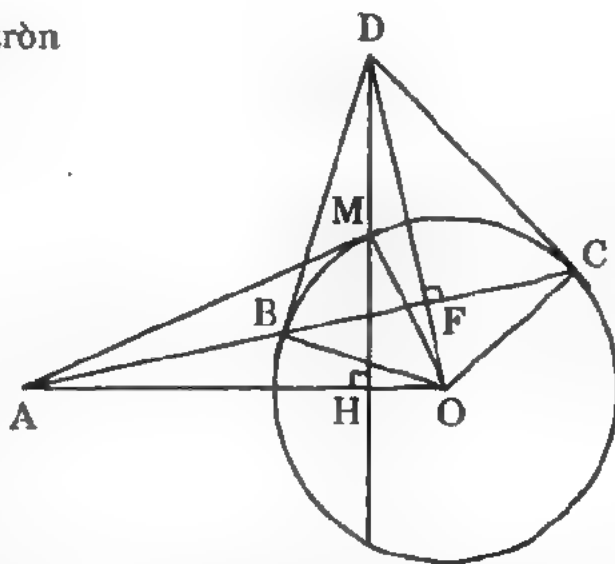
 $\widehat{DCO} + \widehat{DHO} = 180^\circ$

Nên nội tiếp đường tròn đường kính DO

2) Theo giả thiết DB, DC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) nên

 $DB = DC$ Và $\widehat{BDO} = \widehat{CDO}$. Phân giác DE trong tam giác DBC cũng là đường cao nên $DE \perp BC$

Hai tam giác vuông HDO và EAO có chung góc nhọn DOA nên

 $\triangle HOD \sim \triangle EOA$ nên: $\frac{HO}{EO} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow OH.OA = OE.OD$ (1)

3) Trong tam giác vuông COI có CE vuông góc với DO, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông có: $OE.OI = OC'^2 = R^2$ (2)

Từ (1) và (2) có: $OH.OA = OC'^2$, vì $OC' = OM$ nên $OH.OA = OM^2$.

Trong tam giác vuông AMO có MH \perp OA nên $OH.OA = OM^2$ nên $OM \perp AM$ hay AM là tiếp tuyến của (O; R)

Câu 4:

$$2(x-1) = \sqrt{2(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4(x-1)^2 = 2(x^2+x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-5x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Ta có: } -2x^3 + 13x^2 - 19x + 1 = (x^2 - 5x + 1)(-2x + 3) - 2x - 2$$

$$\text{Và } 2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 17x - 2 = (x^2 - 5x + 1)(2x^2 + x - 3) + x + 1$$

$$\text{Với } x = x_1 \text{ thì } (x^2 - 5x + 1) = 0, \text{ do đó: } T = \frac{-2x_1 - 2}{x_1 + 1} = \frac{-2(x_1 + 1)}{x_1 + 1} = -2$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TỈNH THÁI BÌNH (2002 – 2003)

Câu 1: Cho biểu thức: $K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x}$

a) Tìm điều kiện của x để k xác định

b) Rút gọn K

c) Với những giá trị nguyên nào của x thì K có giá trị nguyên

Câu 2: Cho hàm số $y = x + m$ (D). Tìm m để (D):

a) Đi qua điểm A(1; 2003)

b) Song song với đường thẳng: $x - y + 3 = 0$

c) Tiếp xúc với (P) : $y = -\frac{1}{4}x^2$

Câu 3:

a) Một hình chữ nhật có đường chéo 13m, chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m. Tính diện tích của hình chữ nhật

b) Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy điểm E. Kéo dài BE cắt AC tại F

a) Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp

b) Kéo dài DE cắt AC tại K. Tia phân giác góc CKD và cắt EF và CD

tại M và N . Tia phân giác góc \widehat{CBF} cắt CD và CF tại P và Q . Tứ giác $MPNQ$ là hình gì ?

- c) Gọi r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác $ABC; ABD; ADC$. Chứng minh : $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

Giải

Câu 1: $K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x}$

- a) Điều kiện để K xác định là: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

b) $K = \left[\frac{(x+1)^2}{x^2-1} - \frac{(x-1)^2}{x^2-1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right] \frac{x+2003}{x} = \frac{x^2-1}{x^2-1} \cdot \frac{x+2003}{x} = \frac{x+2003}{x}$

c) $K = 1 + \frac{2003}{x}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $K \in \mathbb{Z}$ khi 2003 chia hết cho x , suy ra $x = \pm 1; x = \pm 2003$

So với điều kiện chọn $x = \pm 2003$ (thỏa yêu cầu bài toán)

Câu 2:

- a) (D) đi qua $A(1; 2003)$ khi: $2003 = 1 + m \rightarrow m = 2002$
 b) (D) song song với đường thẳng $x - y + 3 = 0$ nên $m \neq 3$
 c) (D) tiếp xúc với (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$ khi phương trình hoành độ giao điểm

$$-\frac{1}{4}x^2 = x + m \text{ có nghiệm kép hay } x^2 + 4x + 4m = 0 \text{ có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 3:

- a) Gọi x (m) ($7 < x < 13$) là chiều dài của hình chữ nhật, thì chiều rộng của hình chữ nhật là $x - 7$ (m)

Theo định lý Pitago ta có phương trình: $x^2 + (x - 7)^2 = 13^2$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 12; x = -5$ (loại)

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 12m, chiều rộng hình chữ nhật là 5(m)

Diện tích hình chữ nhật là: $12 \cdot 5 = 60 \text{ (m}^2\text{)}$

b) $\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

$$\Leftrightarrow 2002\sqrt{2002} + 2003\sqrt{2003} > 2002\sqrt{2003} + 2003\sqrt{2002}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2003} > \sqrt{2002} \text{ đúng}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 LÊ QUÝ ĐÔN BÌNH ĐỊNH (2005 – 2006)

Câu 1: Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, với $a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

$$\text{và } b = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

Câu 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2

a) Viết phương trình đường thẳng AB

b) Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ M thuộc cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất

Câu 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O có trục tâm H. Phân giác trong góc A cắt đường tròn (O) tại M. Kẻ đường cao AK của tam giác. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng OM đi qua trung điểm N của BC

b) Các góc KAM và MAO bằng nhau

c) $AH = 2NO$

Câu 5: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1)$

Giải

Câu 1:

$$\text{Ta có: } a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}; \quad b = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{9-3} = 1$$

Câu 2:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} + x = 8 \Leftrightarrow |x-2| + x = 8 \quad (1)$$

Nếu $x \leq 2$ thì (1) trở thành: $2 - x + x = 8 \Leftrightarrow 2 = 8$ (vô nghiệm)

Nếu $x > 2$ thì (1) trở thành: $x - 2 + x = 8 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 5$

Câu 3:

a) Vì A, B thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ nên ta có: A(-1; 1); B(2; 4)

Phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$ (*)

Thay tọa độ của A và B vào (*) ta có: $\begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = x + 2$

b) Gọi m là hoành độ của điểm M

Ta có: $M(m; m^2)$ ($m \in [-1; 2]$)

Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A,

B, M lên trục Ox ta có:

$NC = m + 1$; $ND = 2 - m$; $CD = 3$

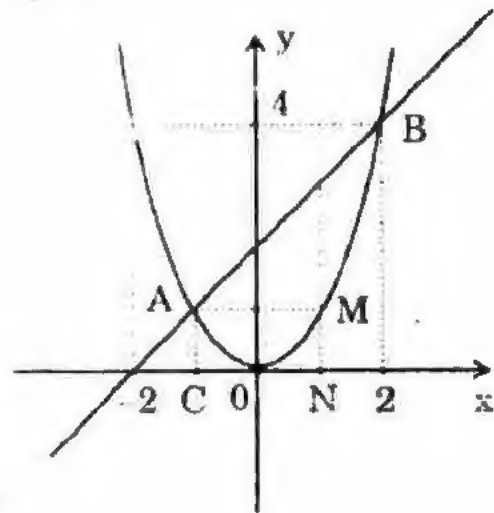
Ta có: $S_{AMB} = S_{ABCD} - (S_{AMNC} + S_{BDMN})$

$$= \frac{1+4}{2} - \left[\frac{(m^2+1)(m+1)}{2} + \frac{(4+m^2)(2-m)}{2} \right]$$

$$= \frac{-3m^2 + 3m + 6}{2} = \frac{-3}{2} \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{27}{8} \leq \frac{27}{8}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ hay $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Vậy diện tích tam giác MAB lớn nhất là $\frac{27}{8}$ khi $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$



Câu 4:

a) Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (giả thiết)

Suy ra $\widehat{BM} = \widehat{CM} \Rightarrow OM \perp BC$ tại trung điểm N của BC

b) Ta có: $AK \parallel OM$ (vì cùng vuông góc với BC)

Suy ra $\widehat{KAM} = \widehat{AMO}$ (so le trong)

Mặt khác: $\widehat{AMO} = \widehat{NAO}$

Suy ra: $\widehat{KAM} = \widehat{MAO}$

c) Gọi F là trung điểm của BC

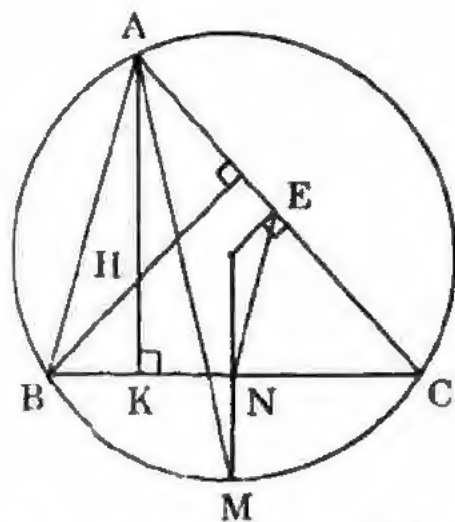
Ta có EN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $EN \parallel AB$;

$FN = \frac{AB}{2}$. Mặt khác $AH \parallel ON$ (cùng vuông góc BC); $BH \parallel OE$ (cùng

vuông góc với AC), suy ra $\triangle AHB \sim \triangle NOE$ (g - g - g)

$$\Rightarrow \frac{NO}{AH} = \frac{NE}{AB} = \frac{1}{2}$$

Vậy $AH = 2NO$



Câu 5:

Do $k(k + 1) = k + k^2$, ta có: $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1)$
 $= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$ (1)

Dễ dàng chứng minh được: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ (2)

Theo phương pháp qui nạp theo n , với $n \in \mathbb{N}^*$ và

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $S = \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$